

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»
(ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС»)**

**Ставропольский технологический институт сервиса (филиал)
(СТИС ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС»)**

Электродинамика и распространение радиоволн

Учебное пособие

Ставрополь-2011

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования**

«Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»

(ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС»)

Ставропольский технологический институт сервиса (филиал)

(СТИС ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС»)

А.В.Баженов, С.В.Малыгин

Электродинамика и распростра- нение радиоволн

**Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям
подготовки дипломированных специалистов
210303 (201500) «Бытовая радиоэлектронная аппаратура»,
210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
210400 «Радиотехника» степень – бакалавр**

Ставрополь-2011

УДК 621.3.09
ББК 32.841
Б 16

Авторы:

профессор кафедры «Информационные технологии и электроника» СТИС (филиал) ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», кандидат технических наук, профессор А.В.Баженов;
старший преподаватель кафедры
«Информационные технологии и электроника»
СТИС (филиал) ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС» С.В.Малыгин

Рецензенты:

Кафедра «Технический сервис» СТИС (филиал) ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС»;
Заслуженный работник высшего профессионального образования Российской Федерации,
профессор кафедры «Автоматизированных систем обработки информации и управления»
Северо-Кавказского государственного технического университета, доктор технических наук,
профессор Пашинцев В.П.

Баженов, А.В. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН: Учебное пособие. [Текст]/ А.В. Баженов, С.В.Малыгин, – Ставрополь: СТИС, 2011. – 244 с., ил.

В учебном пособии изложены основы теории электромагнитного поля, описано распространение плоских однородных и неоднородных волн в изотропных, анизотропных средах и линиях передачи, изложены законы их отражения и преломления, рассмотрены свойства элементарных источников электромагнитных волн и распространение радиоволн в тропосфере и ионосфере.

Учебное пособие соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта Высшего профессионального образования, предъявляемым к уровню подготовки специалистов и бакалавров.

Учебное пособие предназначено для теоретического изучения материала учебной дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн» в соответствии с учебными планами специальности 210303 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура» и направлений 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 210400 «Радиотехника», степень – бакалавр.

УДК 621.3.09
ББК 32.841
Б 16

© Ставропольский технологический институт сервиса, 2011
© А.В.Баженов, С.В.Малыгин, 2011

ГЛАВА 1 ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1 Основные понятия и законы электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей

1.1.1 Задачи, содержание дисциплины и ее связь с другими областями радиотехники

Дисциплина «Электродинамика и распространение радиоволн» является одной из обязательных базовых дисциплин государственного образовательного стандарта программы подготовки инженера по эксплуатации транспортного радиоэлектронного оборудования.

Дисциплина базируется на знании студентами дисциплин: "Физика", "Высшая математика", "Радиотехнические цепи и сигналы".

Дисциплина обеспечивает изучение дисциплин " Устройства СВЧ и антенны", "Прием и обработка сигналов", "Формирование и передача сигналов".

Предметом дисциплины является макроскопическая теория, описывающая свойства материального электромагнитного поля (ЭМП). ЭМП весьма сложное физическое явление, которое не может быть обнаружено с помощью органов чувств человека, за исключением узкого диапазона электромагнитных волн (ЭМВ) видимого света.

Основным общим свойством физических полей является то, что посредством этих полей осуществляется взаимодействие материальных объектов, удаленных друг от друга на некоторое расстояние. Поля столь же материальны, как и материальные объекты их создающие. В настоящее время предпринимаются попытки создания общей теории поля, позволившей объединить бы все физические поля и объяснить их сущность.

Особенностью и основной трудностью изучения электромагнитного поля является то, что в настоящее время ничего нельзя сказать о внутреннем строении ЭМП, и это значительно усложняет его наглядное представление.

ЭМП описывается свойствами, перечисленными в его определении, принятом Комитетом технической терминологии Академии наук СССР в 1957 г.

В соответствии с материалистическим мировоззрением "Электромагнитное поле – особенная форма (вид) материи, отличающаяся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и обнаруживающая дискретность структуры (фотоны), характеризующаяся способностью распространяться в вакууме (в отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, оказывающая на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости".

Существующее в настоящее время деление материи на типы представлено на рисунке:



Рисунок 1.1 – Строение материи

Основными задачами дисциплины является изучение закономерностей макроскопической теории ЭМП, применение методов этой теории к решению практических задач анализа и расчета быстропеременных полей в устройствах радиодиапазона; распространения радиоволн.

1.1.2 Краткий исторический обзор развития представлений об электромагнитном поле, как одной из форм существования материи

Историческое рассмотрение учения об электрических и магнитных явлениях позволяет отметить несколько периодов, каждый из которых характеризуется качественно новой, более общей точкой зрения на эти явления.

Первый период характеризуется наличием самых первоначальных во многом случайных сведений об электрических и магнитных явлениях и умозрительных попытках их осознания, занимает исторический период от Фалеса Милетского, Аристотеля и Платона до конца средневековья.

Второй период начинается с XVI века, в эпоху Возрождения, характеризующуюся настоятельной потребностью изучения природы. В области электрических и магнитных явлений в это время все еще шло накопление экспериментальных факторов.

В этой связи отметим большой вклад английского врача и естествоиспытателя У.Гильберта (1544 – 1603 г.). Он собрал, исследовал экспериментально и описал в вышедшей в 1600 г. книге "О магните, магнитных телах и о большом магните – Земле" множество сведений о свойствах магнитов и действиях магнитных сил. Им же впервые в мире введен термин "электрический".

Систематическое изучение электрических и магнитных явлений началось лишь в XVIII веке. Это время можно считать началом третьего периода в исследовании электричества и магнетизма.

Изучение электрических и магнитных явлений в этот период проходило на хорошей теоретической базе в области других наук: заложены основы дифференциального и интегрального исчисления (Ньютон, Лейбниц), явившегося базой для анализа переменных процессов, сформулировано ряд законов механики и гидравлики.

Учеными широко используется экспериментальный метод изучения природы.

Отметим наиболее выдающиеся открытия в области изучения электричества и магнетизма в течение 3-го периода.

1785 – 1786 г. – французский ученый и инженер Ш.Кулон установил законы взаимодействия между электрическими зарядами, а также магнитными полосами.

1800 г. – итальянский ученый А.Вольта, изобретает химические источники постоянного тока.

1820 г. – датчанин Г.Эрстед открыл магнитное действие токов.

1820 г. – французский ученый Ампер открыл взаимодействие электрических токов между собой, сформулировал закон.

1820 г. – Био, Савар и Лаплас устанавливают закон электромагнитных взаимодействий. Начало теории электродинамики.

Все перечисленные ученые придерживались при исследовании электрических и магнитных явлений концепции дальнего действия.

В XIX же веке появилась и новая, революционная, по отношению к Ньютоновской механике концепция – понятие поля.

1832 г. – М.Фарадей установил влияние среды на электрические и магнитные взаимодействия. Он заменил Ньютоновскую концепцию действия на расстоянии понятием о поле, распространяющимся с конечной скоростью, в особой упругой среде – эфире.

Начало четвертого периода и относится к 1831 – 1832 г., когда благодаря открытию М.Фарадея, утверждается теория физического, материального электромагнитного поля.

1873 г. – Джеймсом Кларком Максвеллом выполнена основная работа по построению теории электромагнитного поля, результаты которой обобщены в "Трактате по электричеству и магнетизму".

Максвелл свел описание всех электрических и магнитных явлений к одной новой системе уравнений – системе уравнений Максвелла. Все последующие открытия в области ЭМП гениально подтверждаются этими уравнениями.

1886 – 1888 г.г. – Генрих Герц возбудил свободные электромагнитные волны, преломление, дифракцию и интерференцию.

1896 г. – А.С.Попов изобретает радио, подтвердив на практике теоретические выводы Фарадея, Максвелла и Герца.

1899 – 1900 г.г. – П.Н.Лебедев экспериментально измеряет давление света, доказав тем самым электромагнитную его природу.

1905 г. – А.Эйнштейн формулирует постулаты теории относительности, которая хорошо согласовалась с положениями теории ЭМП, но вместе с тем позволила устранить из нее понятие "эфир", которое приводило в ряде экспериментов к отрицательным результатам и представлениям о материи, пространстве и времени.

Таким образом, макроскопическая теория электромагнитного поля к 1905 г. практически разработана. Последующий период характеризуется как развитием и уточнением отдельных положений теории, так и в особенности развитием прикладной электродинамики (техники СВЧ, распространения радиоволн).

Это развитие стимулировалось потребностями радиотехники и происходило в нашей стране особенно интенсивно после Великой Октябрьской социалистической революции. Развитие радиотехники в нашей стране неразрывно связано рядом декретов, например, декрет "О централизации радиотехнического дела" (июль 1918 г.).

Развитие радиотехники и прикладной электродинамики в нашей стране связано с именами таких ученых как Л.И.Мандельштам, Н.Д.Папалекси, В.В.Татаринов, М.С.Нейман, Б.А.Введенский, А.Г.Аренберг, Я.Л.Альперт, С.М.Рытов, Г.В.Кисунько, В.В.Никольский, А.Л.Микаэлян, Л.А.Ванштейн и многие другие.

Изучение теории электромагнитного поля и прикладной электродинамики имеет большое значение для теоретической подготовки радиоинженеров, как основы для научного подхода к овладению, использованию, совершенствованию и созданию новой техники.

1.1.3. Основные физические величины, характеризующие ЭМП и его источники

Из курса физики известно, что источниками ЭМП являются: *электрические заряды* $q(t)$ и *токи* $i(t)$.

Заряды могут быть как *точечными*, так и *распределенными*. Распределенные заряды в каждой точке характеризуются дифференциальной скалярной величиной – *плотностью заряда* $\rho(x, y, z, t)$.

Различают плотности заряда:

$$\begin{array}{ll}
 \text{объемную} & \rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}; \quad \text{Кл/м}^3; \\
 \text{поверхностную} & \rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}; \quad \text{[Кл/м}^2\text{]}; \\
 \text{линейную} & \rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}; \quad \text{[Кл/м]}.
 \end{array} \quad (1.1)$$

Полный заряд в объеме V , на поверхности S или вдоль линии l (тонкой нити) определяется как

$$q(t) = \int_{v(s,l)} \rho_v(S, l)(x, y, z) dV (dS, dl); \quad \text{[Кл]}. \quad (1.2)$$

Направленное движение электрических зарядов принято называть *током проводимости*, он характеризуется *силой тока* $i = \frac{dq}{dt}$, [Кл/с =А]. Токи

проводимости могут течь, пересекая поверхность (объемные токи) и по поверхности тела (поверхностные токи). Ток проводимости в каждой точке характеризуется дифференциальной векторной величиной – *объемной плотностью тока* \vec{j} (если ток объемный) и *поверхностной плотностью тока* j_s (если ток поверхностный).

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \bar{\tau}_o \frac{\Delta i}{\Delta S_{\perp}} = \bar{\tau}_o \frac{di}{dS}; \quad \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right]. \quad (1.3)$$

$$j_s = \lim_{\Delta l_{\perp} \rightarrow 0} \bar{\tau}_o \frac{\Delta i}{\Delta l_{\perp}} = \bar{\tau}_o \frac{di}{dl}; \quad \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]. \quad (1.4)$$

В соответствии с выражением (1.4) ток проводимости, протекающий через некоторую S или по поверхности в полосе l , определяется как

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{S}; \quad i = \int_l j_s dl. \quad (1.5)$$

Ток проводимости может быть *омическим* и *сторонним*.

Омический ток i в среде течет под действием электрического поля, плотность его определяется из закона Ома в дифференциальной форме

$$\sigma \vec{E} = \vec{j}, \quad (1.6)$$

где σ – удельная проводимость среды [См/м].

Сторонний ток, характеризуемый плотностью тока $\vec{j}_{\text{ст}}$, течет под действием ЭДС генератора высокочастотных колебаний. *Полный ток проводимости* является суммой омического и стороннего тока проводимости, т.е. $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{ст}}$ характеризуется плотностью тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{ст}} = \vec{E}_{\sigma} + \vec{j}_{\text{ст}} = \sigma(\vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}} / \sigma) = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (1.7)$$

На практике наличие ЭМП обнаруживается по его *силовому воздействию* на заряженные частицы:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (1.8)$$

Рассмотрим слагаемые $F_e = q\vec{E}$ и $F_m = q(\vec{V} \times \vec{B})$. Известно, что электрическое поле (ЭП) воздействует на неподвижный и на движущийся электрический заряд с силой, определяемой *законом Кулона* $\vec{F}_e = q\vec{E}$, изменяя при этом \vec{V} его движения по величине и по направлению. Это свойство ЭП используется в электровакуумных и ионных приборах, электронно-лучевых трубках с электростатическим управлением.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{F}_e / q; \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right]. \quad (1.9)$$

Из равенства (1.9) следует, что \vec{E} (вектор напряженности ЭП) представляет собой дифференциальную векторную величину и характеризует силовое воздействие электрического поля на единичный электрический заряд q .

Известно, что МП воздействует только на движущийся электрический заряд с силой, называемой *силой Лоренца*

$$\vec{F}_M = q[\vec{V}, \vec{B}] \Rightarrow \vec{B} = \vec{F}_M / q\vec{V};$$

откуда получаем уравнение

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{\max}}{Vq}; \left[\frac{H \cdot c}{K_{LM}} = \frac{B \cdot c}{m^2} = \frac{Bb}{m^2} = T_L \right], \quad (1.10)$$

из которого следует, что B (вектор магнитной индукции МП) представляет собой дифференциальную векторную величину и характеризует силовое воздействие МП на единичный электрический заряд q , движущийся перпендикулярно силовым линиям МП с единичной скоростью.

Следствия из формулы (1.10):

1) $F_M = \max$, если $\vec{V} \perp \vec{B}$ и $\vec{F}_M = 0$, если $\vec{V} \parallel \vec{B}$;

2) поскольку $\vec{F}_M \perp \vec{V}$ всегда, то МП изменяет скорость движения q только по направлению, не изменяя ее по величине, т.е. МП придает q нормальное ускорение, и q движется в МП по криволинейной траектории (это свойство МП используется в ЭЛТ с магнитным управлением, в ряде генераторных усилительных приборах СВЧ).

Итак, \vec{E} и \vec{B} характеризуют одно из фундаментальных свойств электрического заряда – взаимодействовать с ЭМП, созданными другими электрическими зарядами.

Другим фундаментальным свойством является способность электрического заряда создавать собственное ЭМП. Оно проявляется в том, что электрическая сила зависит от свойств среды, в которой существует ЭП. Это свойство характеризуется вектором электрической индукции (электрического смещения)

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (1.11)$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; $\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0$;

$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}$ – относительная диэлектрическая проницаемость; ϵ_0 – диэлектрическая

проницаемость свободного пространства (диэлектрическая постоянная

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}; \left[\frac{\Phi}{M} \right]$). Размерность $\vec{D} \left[\frac{КЛ}{M^2} \right]$.

Магнитная сила Лоренца также зависит от *свойств среды*, где существует МП. Это выражается таким образом

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_a}, \quad (1.12)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость, $\mu_a = \mu \cdot \mu_0$; $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$ – относительная магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная (магнитная проницаемость свободного пространства, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; [Гн/м]).

Существует связь

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (1.13)$$

где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с скорость распространения ЭВМ (скорость света) в свободном пространстве.

Известный из курса физики закон полного тока Эрстеда-Ампера $\oint \bar{H} d\bar{l} = I$ дает размерность \bar{H} [А/м].

Вопросы для самоконтроля

1. Физический смысл основных понятий математической теории поля.
2. Что такое символический оператор ∇ ?
3. Доказать, что $\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$.
4. Какие основные физические величины характеризуют ЭМП и его источники?
5. Формула Стокса.
6. Теорема Остроградского – Гаусса.
7. Периоды развития учения об электрических и магнитных явлениях.
8. Охарактеризовать третий период в исследовании электричества и магнетизма.
9. Электрические заряды $q(t)$ и токи $i(t)$. Какими величинами характеризуется силовое действие электромагнитного поля на заряженные частицы?
10. Сформулировать закон Кулона.
11. Что такое сила Лоренца?
12. Вектор электрической индукции (электрического смещения).
13. Закон полного тока Эрстеда-Ампера.
14. Размерность и численное значение абсолютной диэлектрической проницаемости.
15. Размерность и численное значение абсолютной магнитной проницаемости.
16. Что такое сторонний электрический ток?

1.2 Основные законы электродинамики

1.2.1 Уравнения Максвелла и их физический смысл

Первое уравнение Максвелла – является обобщением закона полного тока Эрстеда-Ампера, сформулированного для постоянного тока: циркуляция вектора \vec{H} (см. приложение А) по произвольному замкнутому контуру L равна полному току проводимости, протекающему через произвольную поверхность S , опирающуюся на этот контур L

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I = \int_S \vec{J} d\vec{S}. \quad (1.14)$$

Поскольку этот закон не охватывает явлений, возникающих их в цепях переменного тока с разрывом (например, при протекании переменного тока через диэлектрик конденсатора (согласно рисунка 1.2), то Максвелл на основе чисто логических рассуждений добавил в правой части выражения (1.14) еще одно слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} = I_{\text{см}},$$

назвав его током смещения.

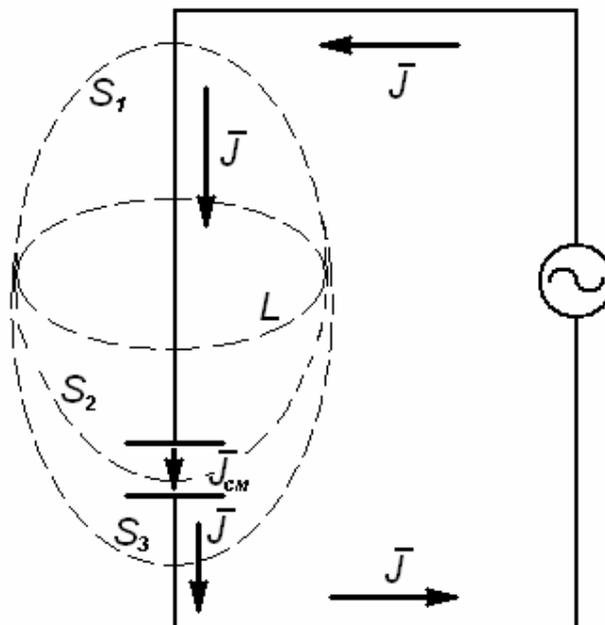


Рисунок 1.2 – Закон полного тока для цепи переменного тока с емкостью

Тогда

$$\oint_L \bar{H} d\bar{\ell} = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S} = \int_S (\bar{J} + \bar{J}_{\text{см}}) d\bar{S} = I + I_{\text{см}}. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) – интегральная форма записи 1-го уравнения Максвелла.

Физический смысл уравнения (1.15): МП возникает не только при движении электрических зарядов q , когда имеет место ток проводимости I , но и

при изменении во времени ЭП $\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0 \right)$, когда имеет место ток смещения $I_{\text{см}}$.

На практике чаще применяется дифференциальная форма записи, которую можно получить из формулы (1.15), применив к левой части его теорему Стокса (см. приложения А, Б) $\oint_L \bar{A} d\bar{\ell} = \int_S \text{rot } \bar{A} d\bar{S}$, в результате чего найдем, что

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} + \bar{J}_{\text{см}}, \quad (1.16)$$

Формула (1.16) – дифференциальная форма записи 1-го уравнения Максвелла.

Физический смысл уравнения (1.16): в любой точке пространства ток проводимости точно также как и изменение во времени ЭП $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, возбуждает в этой же точке вихревое МП, направление \bar{H} которого связано с направлением \bar{J} и $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ правилом правого буравчика (винта) (рисунок 1.3).

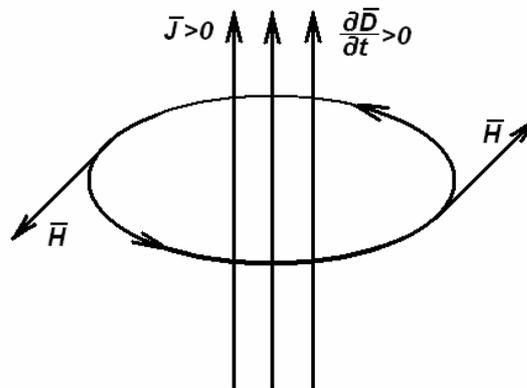


Рисунок 1.3 – Направление вихревого магнитного поля

Следует помнить: в идеальном диэлектрике ($\sigma=0$) – $J=0$, $J_{\text{см}} \neq 0$; в проводящей среде ($\sigma \neq 0$) – $J \neq 0$; $\bar{J}_{\text{см}} \neq 0$ (с увеличением σ : $\bar{J}_{\text{см}}$ уменьшается, \bar{J} увеличивается).

Второе уравнение Максвелла в интегральной форме – является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея: в замкнутом проводнике, находящемся в переменном магнитном поле, возникает ЭДС индукции. Максвелл этот закон выразил равенством

$$e = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S}. \quad (1.17)$$

По определению ЭДС $e = \oint_L \bar{E} d\bar{l}$, тогда

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S}. \quad (1.18)$$

Физический смысл уравнения (1.18): электрическое поле возникает не только при наличии электрических зарядов, но и при любом изменении во времени магнитного поля.

Смысл обобщения Максвеллом закона Фарадея: переменное МП создаст ЭДС в любом произвольном контуре, в том числе и в воображаемом, проходящем в любой среде или в вакууме, проводник же в этом случае является индикатором, устанавливающим факт существования ЭМП. Применяв к левой части выражения (1.18) теорему Стокса получим *дифференциальную форму второго уравнения Максвелла*

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Физический смысл уравнения (1.19): изменение во времени магнитного поля в любой точке пространства возбуждает в этой же точке вихревое ЭП, направление вектора \bar{E} которого связано с направлением $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ правилом правого буравчика (винта) как показано на рисунке 1.4.

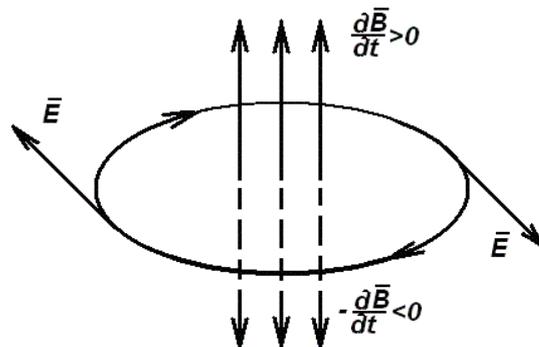


Рисунок 1.4 – Направление вихревого электрического поля

Следствие из 1-го и 2-го уравнения Максвелла: ЭП и МП являются двумя сторонами единого процесса - ЭМП, т.к. при всяком изменении во времени ЭП возникает МП, и наоборот.

Третье уравнение Максвелла в интегральной форме – является обобщением теоремы Гаусса для полей неподвижных зарядов: полный поток вектора \bar{D} (см. приложение А) через произвольную замкнутую поверхность \bar{S} равен суммарному электрическому заряду q , находящемуся в объеме V , ограниченном этой замкнутой поверхностью

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q. \quad (1.20)$$

Максвелл постулировал эту теорему для полей зарядов с произвольной временной зависимостью, т.е.

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q(t) = \int_V \rho_v(x, y, z, t) dV. \quad (1.21)$$

Физический смысл уравнения (1.21): источниками ЭП являются свободные электрические заряды, силовые линии \bar{D} которого начинаются на положительных зарядах "+ q" и заканчиваются на отрицательных зарядах "- q". При этом полный поток \bar{D} , т.е. количество силовых линий \bar{D} через произвольную замкнутую поверхность S численно равно суммарному количеству свободных электрических зарядов, находящихся в объеме V , ограниченном этой замкнутой поверхностью S . Применив к левой части формулы (1.21) теорему Остроградского-Гаусса (см. приложения А, Б)

$$\oint_S \bar{A} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{A} dV$$

найдем, что

$$\text{div} \bar{D} = \rho_v(x, y, z, t) = \rho_v, \quad (1.22)$$

Соотношение (1.22) – *дифференциальная форма записи 3-го уравнения Максвелла.*

Физический смысл формулы (1.22): свободный электрический заряд является истоком $\text{div} \bar{D} > 0$ или стоком $\text{div} \bar{D} < 0$. Если внутри объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S зарядов нет или $q_{\Sigma} = 0$ тогда число силовых линий \bar{D} , входящих в объем, равно числу силовых линий \bar{D} , выходящих из него, и в данном объеме V нет ни источников, ни стоков \bar{D} ($\text{div} \bar{D} = 0$).

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме записи определяет свойства полного потока вектора \bar{B} через замкнутую поверхность

$$\oint_S \bar{\mathbf{B}} d\bar{\mathbf{S}} = 0 \quad . \quad (1.23)$$

Физический смысл уравнения (1.23): полный поток вектора $\bar{\mathbf{B}}$ через любую замкнутую S всегда равен нулю, т.е. силовые линии $\bar{\mathbf{B}}$ всегда или замкнуты сами на себя, или уходят в бесконечность. И в том, и в другом случае число силовых линий $\bar{\mathbf{B}}$, входящих в объем, ограниченный замкнутой поверхностью S , всегда равно числу силовых линий $\bar{\mathbf{B}}$, выходящих из этого объема.

Применив к левой части формулы (1.23) теорему Остроградского-Гаусса, найдем, что

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad . \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) – *дифференциальная форма записи 4-го уравнения Максвелла.*

Физический смысл уравнения (1.24): силовые линии $\bar{\mathbf{B}}$ не имеют ни истоков, ни стоков, ($\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$) т.е. в природе магнитные заряды отсутствуют.

1.2.1.1 Закон сохранения зарядов (уравнение непрерывности)

Закон сохранения заряда является следствием 1-го и 3-го уравнения Максвелла. Действительно, возьмем дивергенцию от формулы (1.16)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \operatorname{div} \left(\bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \right),$$

но так как

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = (\nabla[\nabla, \bar{\mathbf{H}}]) = 0,$$

то

$$\operatorname{div} \left(\bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) = 0; \quad (1.25)$$

Из третьего уравнения (1.22)

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = -\operatorname{div} \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{\mathbf{D}}; \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}; \quad (1.26)$$

Соотношение (1.26) – *дифференциальная форма записи закона сохранения заряда (уравнения непрерывности).*

Физический смысл выражения (1.26): истоком линий плотности тока проводимости \bar{J} является убыль (уменьшение) объемной плотности свободных зарядов ρ_v , при этом заряды, уходя из объема, не исчезают, а перемещаются в другую область пространства.

1.2.1.2 Закон непрерывности линий полного тока

Закон непрерывности линий полного тока является следствием 1-го уравнения Максвелла. Действительно, из (1.25) следует, что

$$\operatorname{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\bar{J} + \bar{J}_{\text{см}}) = \operatorname{div} \bar{J}_{\text{полн}} = 0. \quad (1.27)$$

Физический смысл формулы (1.27): при переменном токе линии вектора плотности полного тока всегда замкнуты: там, где прерываются линии вектора плотности тока проводимости, его продолжают линии вектора плотности тока смещения и наоборот. Этот закон является основой для анализа пространственной структуры электромагнитных полей в антенных системах, линиях передачи энергии СВЧ и т.д.

1.2.2 Комплексный гармонический вектор. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

В радиотехнике наибольшее распространение получили гармонические сигналы (изменяющиеся во времени по закону $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$). Электромагнитные поля, как правило, также имеют такую же временную зависимость.

В электродинамике, как и в теории электрорадиоцепей, для упрощения записи, облегчения и упрощения анализа соотношений между векторами ЭМП, зарядами и токами используется метод комплексных амплитуд.

Суть этого метода в электродинамике заключается в представлении векторов и скалярных функций, описывающих ЭМП, в виде комплексных величин им соответствующих. При этом интегро-дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими. Затем осуществляется обратное преобразование комплексных величин в скалярные.

1.2.2.1 Комплексный гармонический вектор (скаляр)

Запишем гармонический вектор \bar{E} в виде проекции на оси декартовой системы координат (x, y, z)

$$\bar{E} = E_{\text{xm}} \cos(\omega t - \alpha_x) \bar{x}^0 + E_{\text{ym}} \cos(\omega t - \alpha_y) \bar{y}^0 + E_{\text{zm}} \cos(\omega t - \alpha_z) \bar{z}^0. \quad (1.28)$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos(\omega t - \alpha) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \alpha)} \right\}.$$

Учитывая это, выражение для вектора \bar{E} запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \operatorname{Re} E_{xm} \cdot e^{j(\omega t - \alpha_x)} \bar{x}^0 + \operatorname{Re} E_{ym} \cdot e^{j(\omega t - \alpha_y)} \bar{y}^0 + \operatorname{Re} E_{zm} \cdot e^{j(\omega t - \alpha_z)} \bar{z}^0 = \\ &= \operatorname{Re} \left[\left(E_{xm} \cdot \bar{e}^{j\alpha_x} \bar{x}^0 + E_{ym} \cdot \bar{e}^{j\alpha_y} \bar{y}^0 + E_{zm} \cdot \bar{e}^{j\alpha_z} \bar{z}^0 \right) e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

где $\dot{\bar{E}}_0 = E_{xm} \cdot \bar{e}^{j\alpha_x} \bar{x}^0 + E_{ym} \cdot \bar{e}^{j\alpha_y} \bar{y}^0 + E_{zm} \cdot \bar{e}^{j\alpha_z} \bar{z}^0$ - комплексная амплитуда вектора \bar{E} ; $\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_0 e^{j\omega t}$ - комплексный гармонический вектор.

Вектор \bar{E} связан с комплексной амплитудой $\dot{\bar{E}}_0$ соотношением

$$\bar{E} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{E}}_0 e^{j\omega t} \right\}.$$

По аналогии можно теперь записать выражение для комплексного гармонического скаляра.

Пусть ρ – скалярная величина, а $\rho = \rho_0 \cos(\omega t - \alpha)$, где ρ_0 – амплитуда, а α – начальная фаза.

Тогда в соответствии с выражением для комплексного гармонического скаляра $\dot{\rho}$ получим:

$$\dot{\rho} = \rho_0 \bar{e}^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = \dot{\rho}_0 e^{j\omega t},$$

где $\dot{\rho}_0 = \rho_0 \bar{e}^{j\alpha}$ - комплексная амплитуда скаляра $\dot{\rho}$. Скаляр ρ связан с комплексной амплитудой соотношением

$$\rho = \operatorname{Re} \left\{ \dot{\rho}_0 e^{j\omega t} \right\}.$$

1.2.2.2 Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

Выясним, какой вид принимают основные уравнения ЭМП для комплексных амплитуд векторов \bar{E} и \bar{H} .

Как было показано, для гармонических полей можно записать

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{E}}}_0 e^{j\omega t} \right\}, & \bar{\mathbf{H}} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 e^{j\omega t} \right\}, & \bar{\mathbf{J}} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{J}}}_0 e^{j\omega t} \right\}, \\ \bar{\mathbf{D}} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{D}}}_0 e^{j\omega t} \right\}, & \bar{\mathbf{B}} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_0 e^{j\omega t} \right\}.\end{aligned}$$

С учетом этих выражений уравнения Максвелла принимают вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right) &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{J}}}_0 e^{j\omega t} \right\} + \varepsilon_a \frac{d}{dt} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{E}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right); \\ \operatorname{rot} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{E}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right) &= -\mu_a \frac{d}{dt} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right); \\ \operatorname{div} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{D}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right) &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\rho}_0 e^{j\omega t} \right\}; \\ \operatorname{div} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{\mathbf{J}}}_0 e^{j\omega t} \right\} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\operatorname{Re} \left\{ \dot{\rho}_0 e^{j\omega t} \right\} \right).$$

В силу линейности уравнений и линейности операции Re имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left\{ \operatorname{rot} \dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\dot{\bar{\mathbf{J}}}_0 e^{j\omega t} + \varepsilon_a \frac{d}{dt} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_0 e^{j\omega t} \right) \right\}; \\ \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{rot} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_0 e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \left(-\mu_a \frac{d}{dt} \dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 e^{j\omega t} \right) \right\}; \\ \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{div} \dot{\bar{\mathbf{D}}}_0 e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{\rho}_0 e^{j\omega t} \right\}; \\ \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{div} \dot{\bar{\mathbf{B}}}_0 e^{j\omega t} \right\} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{Re} \left\{ \operatorname{div} \dot{\bar{\mathbf{J}}}_0 e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{d}{dt} \dot{\rho}_0 e^{j\omega t} \right) \right\}.$$

Опустив оператор Re , получим основные уравнения для комплексных гармонических векторов.

Далее вычисляем производные по t и, сокращая на временной множитель $e^{j\omega t}$, получим уравнение Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{J}}_0 + j\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}}; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_0 = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_0; \\ \operatorname{div} \dot{\vec{D}}_0 = \dot{\rho}_0; \\ \operatorname{div} \dot{\vec{B}}_0 = 0. \end{cases}$$

Уравнение непрерывности для комплексных амплитуд

$$\operatorname{div} \dot{\vec{J}} = -j\omega\dot{\rho}_0.$$

Часто индекс "0" и точки над комплексными величинами опускают, так как присутствие множителя $j\omega$ указывает на комплексную форму записи. Окончательно имеем

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\vec{H}} = \bar{\vec{J}} + j\omega\epsilon_a \bar{\vec{E}}; \\ \operatorname{rot} \bar{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \bar{\vec{H}}; \\ \operatorname{div} \bar{\vec{D}} = \rho; \\ \operatorname{div} \bar{\vec{B}} = 0; \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div} \bar{\vec{J}} = -j\omega\rho. \quad (1.30)$$

1.2.3 Комплексная диэлектрическая проницаемость. Токи смещения в гармонических полях

1.2.3.1 Комплексная диэлектрическая проницаемость

Введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет более просто учесть конечный характер проводимости реальных сред. При этом формальная запись основных соотношений для ЭМП не изменяется. Математическое описание энергетических процессов при комплексной форме записи также упрощает их анализ и в ряде случаев проясняет физический смысл явлений.

Полный ток проводимости в проводящей среде

$$\bar{\vec{J}} = \sigma\bar{\vec{E}} + \bar{\vec{J}}_{\text{ст}}.$$

Подставив это выражение в первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд, получим

$$\operatorname{rot} \bar{\vec{H}} = \sigma\bar{\vec{E}} + \bar{\vec{J}}_{\text{ст}} + j\omega\epsilon_a \bar{\vec{E}} = \bar{\vec{J}}_{\text{ст}} + j\omega\left(\epsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\bar{\vec{E}},$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}$ - комплексная диэлектрическая проницаемость.

Теперь уравнения Максвелла (1.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\bar{H} &= \bar{J}_{\text{ст}} + j\omega\tilde{\epsilon}_a\bar{E}, \\ \operatorname{rot}\bar{E} &= -j\omega\mu_a\bar{H}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Если среда – идеальный диэлектрик ($\sigma = 0$), то $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$.

Отсюда следует, что уравнение Максвелла для случая проводящей среды ($\sigma \neq 0$) получается из уравнений Максвелла, записанных для идеального диэлектрика заменой ϵ_a на $\tilde{\epsilon}_a$.

Таким образом, можно утверждать, что проводящую среду можно рассматривать как непроводящую, но имеющую комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}_a$.

1.2.3.2 Токи смещения в гармонических полях

Выражение для плотности тока смещения имеет вид

$$\bar{J}_{\text{см}} = \frac{d\bar{D}}{dt},$$

или для комплексных амплитуд

$$\bar{J}_{\text{см}} = j\omega\epsilon_a\bar{E}.$$

Восстановим временную зависимость $\bar{J}_{\text{см}} \cdot e^{j\omega t} = j\omega\epsilon_a\bar{E}e^{j\omega t}$ и, поскольку $j = e^{j\pi/2}$, получим

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{см}} \cdot e^{j\omega t} &= \omega\epsilon_a\bar{E}e^{j(\omega t + \pi/2)} = \omega\epsilon_a\bar{E}e^{j\omega(t + \pi/2\omega)} = \omega\epsilon_a\bar{E}e^{j\omega(t + T/4)} \\ \bar{J}_{\text{см}} \cdot e^{j\omega t} &= \omega\epsilon_a\bar{E}e^{j\omega(t + T/4)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Таким образом, из выражения (1.32) следует:

- а) для гармонических полей закон распределения силовых линий тока смещения в пространстве совпадает с законом распределения силовых линий электрического поля, так как вектор $\bar{J}_{\text{см}}$ пропорционален вектору \bar{E} ;
- б) ток смещения опережает электрическое поле на четверть периода;
- в) если ЭМП имеет характер бегущих волн, то $\bar{J}_{\text{см}}$ опережает \bar{E} в пространстве на четверть длины волны, так как за время $T/4$ поле перемещается на расстояние $\lambda/4$.

Вопросы для самоконтроля

1. Записать систему уравнений Максвелла в интегральной форме и сформулировать их физический смысл.
2. Записать систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме и сформулировать их физический смысл.
3. Сформулировать закон сохранения зарядов. Доказать его на основе 1-го и 3-го уравнений Максвелла.
4. Сформулировать закон непрерывности линий полного тока.
5. В чем суть метода комплексных амплитуд в электродинамике?
6. Какие формальные упрощения вводятся в электродинамике при записи гармонических величин методом комплексных амплитуд?
7. Каким образом вводится комплексный гармонический вектор, комплексный скаляр?
8. Записать систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд.
9. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Токи смещения в гармонических полях.
10. Каким образом соотносятся векторы тока смещения и напряженности электрического поля в гармонических полях?

1.3 Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Рассмотренная ранее картина предусматривала, что ЭМП находится в некоторой области пространства, заполненной однородным веществом. На практике чаще всего приходится иметь дело с различными средами, граничащими друг с другом. При этом, как правило, границы бывают резкими: параметры одной среды скачком переходят в параметры другой. Так как уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями, то на такой границе они имеют бесконечное множество решений, то есть теряют физический смысл. Возникает задача дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими векторы в различных граничащих средах.

Граничными условиями называются соотношения между одноименными векторами поля в двух разнородных граничащих средах. Так как поля по-разному взаимодействуют с веществом вдоль границы раздела и поперек нее, то целесообразно ввести граничные условия для составляющих, расположенных касательно и перпендикулярно границе раздела.

1.3.1 Граничные условия для касательных (тангенциальных) составляющих векторов E и H

Даны две различные среды: 1-я с $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$; 2-я с $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ (Рисунок 3.1) S_{12} – граница раздела 2-х сред. Проведем близкие к S_{12} поверхности: S_1 – в первой среде, S_2 – во второй среде, и будем считать, что в тонком переходном слое между S_1 и S_2 параметры 1-ой среды плавно переходят в параметры 2-ой среды (рисунок 1.5).

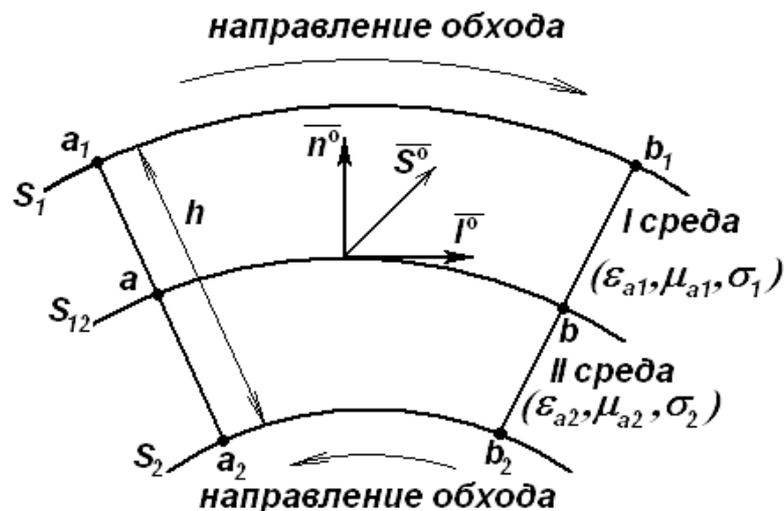


Рисунок 1.5 – К выводу граничных условий для касательных составляющих векторов E и H

При таком предположении электромагнитные параметры и векторы поля в этом слое остаются непрерывными и конечными функциями координат и времени. Поэтому на границе раздела можно пользоваться уравнениями Максвелла.

Требуется определить граничные условия для касательных (тангенциальных) составляющих их векторов ЭМП.

Проведем замкнутый контур L ($a, a_1, b_1, b, b_2, a_2, a$), лежащий в 1-й и 2-й средах. Восстановим нормали: \bar{n}^0 - к границе раздела S_{12} и \bar{S}^0 - к плоскости, опирающейся на контур L , а также проведем касательную $\bar{l}^0 = [\bar{S}^0, \bar{n}^0]$ к границе раздела (см. рисунок 1.5). Запишем 2-е и 1-е уравнения Максвелла для контура L (обход контура L происходит по часовой стрелке):

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{E} d\bar{l} &= \int_{aa_1} \bar{E}_1 d\bar{l} + \int_{a_1b_1} \bar{E}_1 d\bar{l} + \int_{b_1b} \bar{E}_1 d\bar{l} + \int_{bb_2} \bar{E}_2 d\bar{l} + \int_{b_2a_2} \bar{E}_2 d\bar{l} + \int_{a_2a} \bar{E}_2 d\bar{l} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S}; \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{H} d\bar{l} &= \int_{aa_1} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{a_1b_1} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{b_1b} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{bb_2} \bar{H}_2 d\bar{l} + \int_{b_2a_2} \bar{H}_2 d\bar{l} + \int_{a_2a} \bar{H}_2 d\bar{l} = \\ &= \int_S \bar{J} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{D} d\bar{S}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{H}_1, \bar{H}_2$ - значения векторов в 1-й и 2-й средах, S - плоскость, опирающаяся на L .

Устремим поверхности S_1 и S_2 к S_{12} , т.е. $h \rightarrow 0$. При этом:

а) $aa_1, b_1b, bb_2, a_2a \rightarrow 0$; $a_1b_1, a_2b_2 \rightarrow ab$; $S = ab \times h \rightarrow 0$;

б) поскольку $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{H}_1, \bar{H}_2$ конечны, а пределы интегрирования $aa_1, b_1b, bb_2, a_2a \rightarrow 0$; то 1, 3, 4, 6 - интегралы (1.33) и (1.34) $\rightarrow 0$;

в) поскольку \bar{B} - конечен, а $S \rightarrow 0$, то правая часть формулы (1.33) $\rightarrow 0$;

д) слагаемое в первой части выражения (1.34) $\int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S} \rightarrow 0$, т.к. \bar{D} - конечен, $S \rightarrow 0$;

е) слагаемое в правой части выражения (1.34)

$$\lim_{S \rightarrow 0} \int_S \bar{J} d\bar{S} = \lim_{\substack{\ell \rightarrow ab \\ h \rightarrow 0}} \int_{\ell} \int_h \bar{J} \bar{S}^0 d\ell dh = \int_{ab} \bar{J}_s \bar{S}^0 d\ell; \quad (1.35)$$

ж) поскольку в первой среде направление обхода совпадает с 1^0 , а во второй – противоположно, то в первой среде $d\bar{l} = -\bar{l}^0 d\ell$, и

$$\begin{aligned} \lim_{a_1 b_1 \rightarrow ab} \int_{a_1 b_1} \bar{H}_1 \bar{l}^0 d\ell - \lim_{b_2 a_2 \rightarrow ab} \int_{b_2 a_2} \bar{H}_2 \bar{l}^0 d\ell &= \int_{ab} (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \bar{l}^0 d\ell; \\ \lim_{-a_1 b_1 \rightarrow ab} \int_{a_1 b_1} \bar{E}_1 \bar{l}^0 d\ell - \lim_{b_2 a_2 \rightarrow ab} \int_{b_2 a_2} \bar{E}_2 \bar{l}^0 d\ell &= \int_{ab} (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \bar{l}^0 d\ell. \end{aligned}$$

С учетом условий (а–ж) формулы (1.33) и (1.34) будут иметь вид:

$$\int_{ab} (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \bar{l}^0 d\ell = 0 \quad ; \quad (1.36)$$

$$\int_{ab} (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \bar{l}^0 d\ell = \int_{ab} \bar{J}_s \bar{S}^0 d\ell, \quad (1.37)$$

из которых следует что:

$$(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \bar{l}_0 = E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \quad ; \quad (1.38)$$

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \bar{l}_0 = H_{1\tau} - H_{2\tau} = \bar{J}_s \cdot \bar{S}^0 = J_s^S. \quad (1.39)$$

Граничные условия для векторов \bar{D} и \bar{B} найдем из материальных уравнений среды (1.11), (1.12) и граничных условий (1.38), (1.39) при $J_s^S = 0$.

Поскольку из материальных уравнений

$$\begin{aligned} E_\tau = \frac{D_\tau}{\epsilon_a}; \quad H_\tau = \frac{B_\tau}{\mu_a}, \quad \text{то} \\ \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}; \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Из формул (1.38)...(1.40) следует, что:

а) составляющая E_τ при переходе ЭМП через границу раздела 2-х сред не изменяется, то есть составляющая \bar{E}_τ всегда непрерывна, составляющая

H_τ - изменяется скачком на величину j_s^s . Если $j_s^s = 0$ (что характерно для границы двух идеальных диэлектриков), то составляющая H_τ – непрерывна;

б) составляющие D_τ и B_τ при переходе через границу раздела двух идеальных диэлектриков претерпевают скачок, равный отношению $\frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}$ и $\frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}$ соответственно.

Рассмотрим случай, когда вектор \vec{E} электрического поля расположен касательно к плоскости раздела идеального диэлектрика и проводника (рисунок 1.6). В идеальном проводнике имеются свободные заряды, которые под действием внешнего электрического поля будут перемещаться до тех пор, пока электрическое поле, создаваемое этими зарядами, не станет по величине равным внешнему полю. По направлению внешнее поле и поле внутри проводника противоположны, т.е. взаимно компенсируют друг друга. Это означает физически, что электрическое поле в проводниках существовать не может.

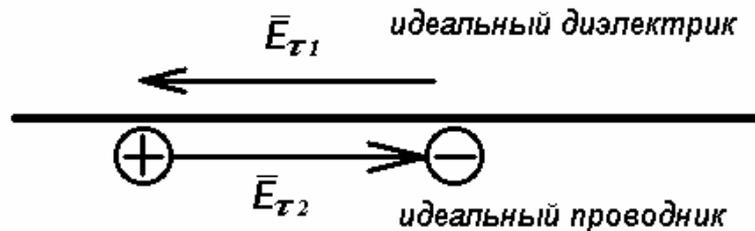


Рисунок 1.6 – Граничные условия для вектора E_τ

Таким образом, граничные условия для тангенциальной составляющей вектора \vec{E} суммарного поля на границе раздела $E_\tau = E_{\tau1} - E_{\tau2}$, или

$$E_{\tau1} = E_{\tau2}.$$

Для изменяющегося во времени электрического поля граничные условия будут выглядеть аналогично, только наводимые им заряды и вторичные поля в проводнике также будут изменяться во времени.

В отличие от проводников в диэлектриках отсутствуют свободные заряды, способные перемещаться в проводнике. Однако в диэлектрике имеются заряды связанные (отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ядра молекул), которые под действием внешнего электрического поля способны смещаться в разные стороны на некоторое расстояние отно-

сительно своего первоначального положения (в отсутствие поля). Это явление называется поляризацией диэлектрика (рисунок 1.7).

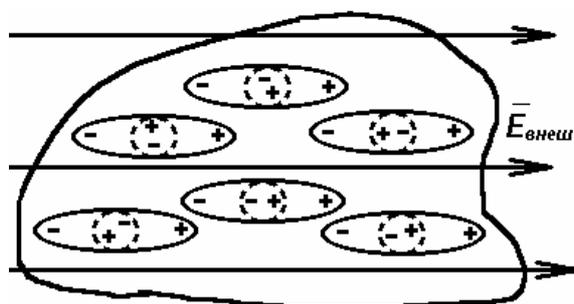


Рисунок 1.7 – Поляризация диэлектрика

Реальный механизм возникновения поляризации для некоторых диэлектриков может быть различным, но в первом приближении достаточно использования этой модели.

Рассмотрим поведение тангенциальной составляющей вектора \vec{E} на бесконечной границе раздела двух идеальных диэлектриков (рисунок 1.8).

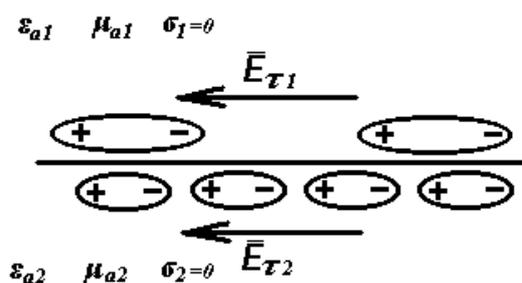


Рисунок 1.8 – Граничные условия для E_τ на границе двух идеальных диэлектриков

Несмотря на различную степень поляризации диэлектриков, что объясняется различным числом молекул в единице объема и различной способностью к поляризации молекул разных диэлектриков, в целом каждый из диэлектриков остается нейтральным, поэтому и напряженность электрического поля не изменяется, т.е.

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2},$$

или

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}},$$

граничное условие для тангенциальных составляющих вектора электрического смещения означает физически, что под действием электрического по-

ля, касательного к границе раздела диэлектрики поляризуются по-разному, так что величина напряженности суммарного поля не изменяется.

Если вектор \vec{H} расположен параллельно поверхности раздела идеального диэлектрика и идеального немагнитного проводника, то возбуждаемые им токи \vec{J}_s расположены так, как показано на рисунке 1.9 (крестики обозначают, что токи \vec{J}_s направлены перпендикулярно плоскости рисунка от нас).

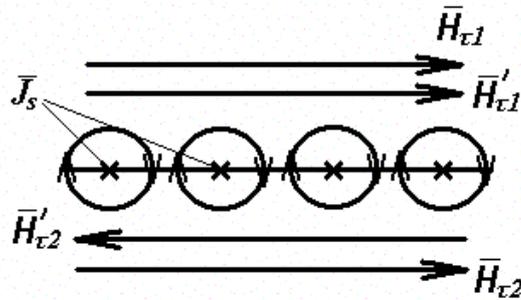


Рисунок 1.9 – Граничные условия для вектора H_t

Эти токи возбуждают вторичное поле H_{t2}' , которое в проводнике компенсирует внешнее поле H_{t2} и суммарное поле в проводнике будет равно 0.

В диэлектрике вблизи границы $H_{t1} + H_{t2}' = 2H_{t1} = J_s$.

1.3.2 Граничные условия для нормальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H}

Поверхность Q является поверхностью раздела 2-х сред. В тонком слое между S_1 и S_2 параметры 1-й среды плавно переходят в параметры 2-ой среды S_1 и S_2 проецируются на поверхность Q как S_{12} (рисунок 1.10). К S_1, S_2, S_{12} восстановлены нормали $\vec{n}_1, \vec{n}^0, \vec{n}_2$. При этом $\vec{n}_1 = \vec{n}^0; \vec{n}_2 = -\vec{n}^0$.

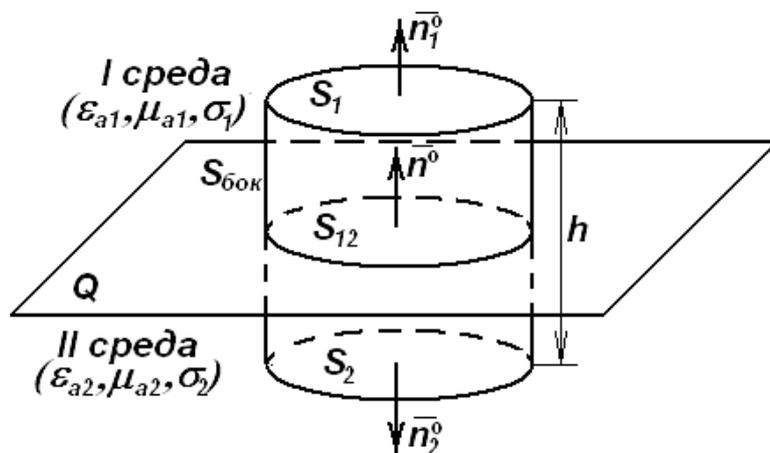


Рисунок 1.10 – К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов D и B

Требуется определить граничные условия для нормальных составляющих векторов ЭМП.

Воспользуемся 3-им и 4-ым уравнениями Максвелла, которые применительно к условиям данной задачи запишутся в виде:

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{D}_1 d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{D}_2 d\bar{S}_2 + \int_{S_{\text{бок}}} \bar{D}_{\text{бок}} d\bar{S}_{\text{бок}} = \int_V \rho_V dV; \quad (1.41)$$

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{B}_1 d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{B}_2 d\bar{S}_2 + \int_{S_{\text{бок}}} \bar{B}_{\text{бок}} d\bar{S}_{\text{бок}} = 0. \quad (1.42)$$

Устремим $h \rightarrow 0$. При этом произойдет следующее:

а) $S_1, S_2 \rightarrow S_{12}$; $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$, $V = S_{12} \times h \rightarrow 0$;

б) поскольку $\bar{D}_{\text{бок}}$ и $\bar{B}_{\text{бок}}$ – конечны, а пределы интегрирования $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$, то 3-и интегралы в (1.41) и (1.42) стремятся к нулю;

в) $\lim_{V \rightarrow 0} \int_V \rho_V dV = \lim_{S_1, S_2 \rightarrow S_{12}} \iint_{S_{12} h} \rho_V dh dS_{12} = \int_{S_{12}} \rho_S dS_{12}$;

д) поскольку $h \rightarrow 0$, то $d\bar{S}_1 = \bar{n}_1^0 dS_1 = \bar{n}^0 dS_1$, $d\bar{S}_2 = \bar{n}_2^0 dS_2 = -\bar{n}^0 dS_2$;

$$\lim_{S_1 \rightarrow S_{12}} \int_{S_1} \bar{D}_1 d\bar{S}_1 + \lim_{S_1 \rightarrow S_{12}} \int_{S_2} \bar{D}_2 d\bar{S}_2 = \int_{S_{12}} (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \bar{n}^0 dS_{12};$$

$$\lim_{S_1 \rightarrow S_{12}} \int_{S_1} \bar{B}_1 d\bar{S}_1 + \lim_{S_2 \rightarrow S_{12}} \int_{S_2} \bar{B}_2 d\bar{S}_2 = \int_{S_{12}} (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \bar{n}^0 dS_{12}.$$

С учетом условий (а–д) формулы (1.41) и (1.42) запишутся в виде:

$$\int_{S_{12}} (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \bar{n}^0 dS_{12} = \int_{S_{12}} \rho_S dS_{12}; \quad (1.43)$$

$$\int_{S_{12}} (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \bar{n}^0 dS_{12} = 0, \quad (1.44)$$

из которых следует, что

$$(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \bar{n}^0 = \bar{D}_{1n} - \bar{D}_{2n} = \rho_s, \quad (1.45)$$

$$(\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \bar{n}^0 = \bar{B}_{1n} - \bar{B}_{2n} = 0. \quad (1.46)$$

Если вектор \vec{E} электрического поля расположен перпендикулярно к плоскости раздела идеальных диэлектрика и проводника (рисунок 1.11), то свободные заряды в последнем перемещаются также перпендикулярно поверхности.

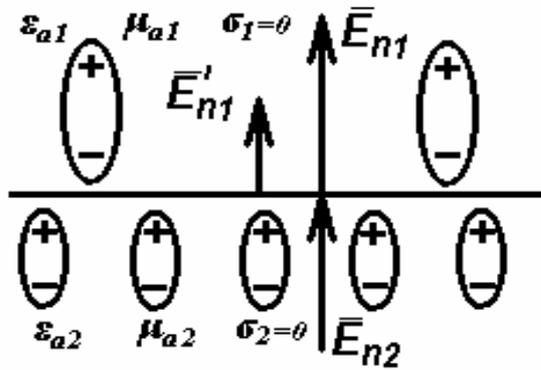


Рисунок 1.11 – Граничные условия для вектора E_n

На поверхности раздела идеального диэлектрика и идеального проводника образуется тонкий слой зарядов, которые для диэлектрика являются нескомпенсированными и возбуждают в нем электрическое поле $E_{n2} = E_{n1}$, следовательно,

$$E_n = E_{n1} + E_{n2} = 2E_{n1}.$$

В проводнике же поле по-прежнему не существует, так как полностью скомпенсировано свободно движущимися зарядами.

При нормальном расположении вектора \vec{E} на границе раздела двух диэлектриков следует иметь в виду, что величина вектора \vec{D} одинакова при поляризации различных диэлектриков одним и тем же внешним полем (рисунок 1.12).

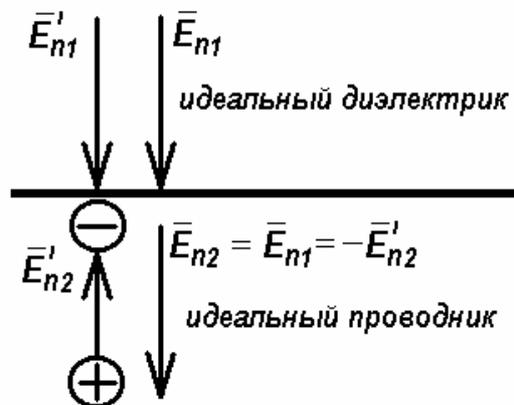


Рисунок 1.12 – Граничные условия для E_n на границе раздела двух диэлектриков

Поэтому можно записать

$$D_{n1} = D_{n2},$$

или,

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}.$$

Физически данную формулу можно объяснить появлением на границе раздела двух диэлектриков нескомпенсированных зарядов, вызывающих скачок напряженности электрического поля. Если поле переходит из среды с большей диэлектрической проницаемостью в среду с меньшей диэлектрической проницаемостью, то нормальная составляющая напряженности электрического поля уменьшится скачком в $\epsilon_{a2}/\epsilon_{a1}$ раз. Если поле переходит из среды в среду в обратном направлении, то нормальная составляющая во столько же раз увеличивается.

Рассмотрим поведение переменного магнитного поля на границе раздела вакуума и идеального немагнитного проводника. Если вектор \vec{H}_{n1} расположен перпендикулярно поверхности раздела, то он наводит на поверхности проводника элементарные вихревые токи \vec{J}_s , которые замыкаются вокруг вектора \vec{H}_{n1} по правилу правого винта (рисунок 1.13).

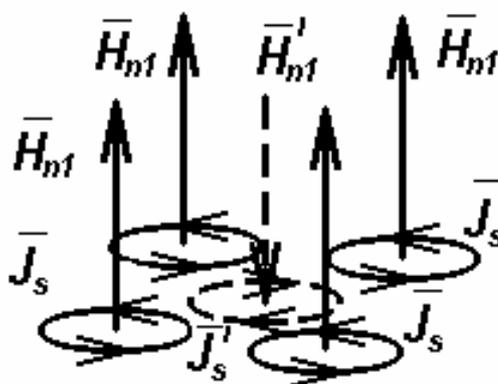


Рисунок 1.13 – Граничные условия для вектора H_n

Соседние элементарные токи образуют элементарный ток J_s^1 , который по правилу правого винта возбудит в вакууме переменное магнитное поле \vec{H}_{n1} , направление которого противоположно первичному полю, т.е.

$$\vec{H}_n = \vec{H}_{n1} - \vec{H}_{n1}' = 0,$$

или

$$\vec{H}_{n1} = \vec{H}_{n2}.$$

Граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{H} в граничащих средах с параметрами $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \epsilon_{a2}, \mu_{a2}$ найдем из (1.45), (1.46) при $\rho_s = 0$ и материальных уравнений (1.11), (1.12). Поскольку $\vec{D}_n = \epsilon_a \vec{E}_n$; $\vec{B}_n = \mu_a \vec{H}_n$, то

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}; \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (1.47)$$

Из соотношений (1.45)...(1.47) следует, что:

1. D_n при переходе через границу раздела 2-х различных сред изменяется скачком на величину ρ_S , V_n – непрерывна. При $\rho_S=0$ (что характерно для границы раздела двух идеальных диэлектриков) D_n также непрерывна;

2. E_n , H_n при переходе через границу раздела 2-х идеальных диэлектриков ($\rho_S=0$) изменяются скачком на величину $\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}$ и $\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}$ соответственно.

1.3.3 Граничные условия для векторов поля на границе раздела с идеальным проводником

В природе нет идеальных проводников. Но в ряде случаев, когда σ проводника велика, удобно считать, что проводник является идеальным, т.е. $\sigma = \infty$. Такое допущение значительно упрощает решение ряда задач в электродинамике, а возникающей при этом ошибкой можно пренебречь.

При определении граничных условий для векторов поля на поверхности идеального проводника, необходимо иметь ввиду, что ЭМП в толще идеального проводника отсутствует. Если допустить обратное, то при конечном \bar{E} и $\sigma \rightarrow \infty$ $\bar{J} = \sigma \bar{E} \rightarrow \infty$, что физически невозможно. Т.о., в толще проводника

$$\bar{E} = 0 \rightarrow \bar{J} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{J}_{\text{см}} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \rightarrow \bar{J}_{\text{полн}} = \bar{J} + \bar{J}_{\text{см}} = 0 \rightarrow \text{rot} \bar{H} = \bar{J}_{\text{полн}} = 0 \rightarrow \bar{H} = 0.$$

Пусть 1-я среда – диэлектрик с $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1 = 0$, 2-я среда – идеальный проводник с удельной проводимостью $\sigma_2 = \infty$. Определить граничные условия для векторов поля.

Поскольку ЭМП во 2-й среде (в толще идеального проводника) отсутствует, то из граничных условий для \bar{E} и \bar{D} $E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$ и $D_{1h} - D_{2h} = \rho_S$ следует, что при $E_2 = 0$ $E_{1\tau} = E_{\tau} = 0$; т.е:

$$\begin{aligned} D_{1n} = D_n = \epsilon_{a1} E_{1n} = \epsilon_{a1} E_n = \rho_S; \\ E_{\tau} = 0; \quad E_n = \rho_S / \epsilon_{a1}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Таким образом, из выражения (1.48) следует, что на идеально проводящей поверхности вектор \bar{E} не имеет касательной составляющей, т.е. силовые линии \bar{E} подходят к поверхности идеального проводника строго по нормали и заканчиваются на свободных зарядах, расположенных на поверхности идеального проводника с поверхностной плотностью $\rho_S = \epsilon_{a1} \cdot E_h$.

Аналогично, из граничных условий для \bar{H} и \bar{B}

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = J_s^s \quad \text{и} \quad B_{1n} - B_{2n} = 0$$

следует, что при $H_2 = 0$; $H_{1\tau} = H_\tau = J_s^s$ и $B_{1n} = B_n = \mu_{a1}$; $H_{n1} = 0$, т.е.

$$H_\tau = J_s^s; \quad H_n = 0. \quad (1.49)$$

Таким образом, из формулы (1.49) следует, что на идеально проводящей поверхности вектор \bar{H} не имеет нормальной составляющей, т.е. силовые линии \bar{H} подходят к поверхности идеального проводника по касательной, возбуждая на ней ток проводимости с поверхностной плотностью тока $J_s^s = H_\tau$.

В соответствии с соотношением (1.48) $H_\tau = \bar{H}_1 \bar{\ell}^0$; $J_s^s = \bar{J}_s \bar{S}^0$, где $\bar{\ell}^0, \bar{S}^0$ единичные орты (см. рисунок 1.14, согласно которому $\bar{S}^0 = [\bar{n}^0, \bar{\ell}^0]$). Тогда, $\bar{J}_s = [\bar{n}^0, \bar{H}_\tau]$ если $\bar{H}_\tau \parallel \bar{\ell}^0$.

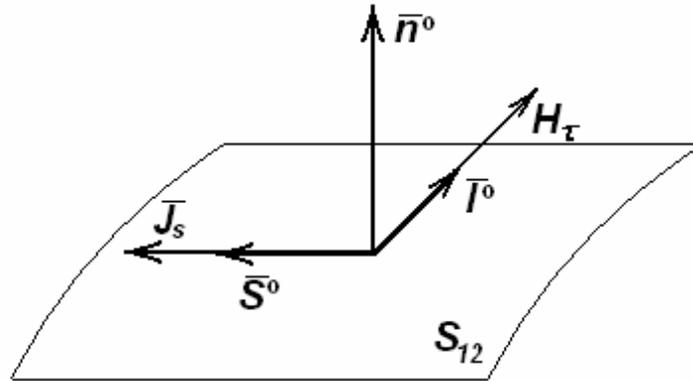


Рисунок 1.14 – Граничные условия на границе с идеальным проводником

Таким образом, наводимый на поверхности идеального проводника поверхностный ток перпендикулярен \bar{H}_τ и лежит с вектором \bar{H}_τ в одной плоскости, перпендикулярной орту \bar{n}^0 (\bar{n}^0 – нормаль к поверхности идеального проводника).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют граничными условиями в электродинамике? Почему необходимо их вводить?
2. Граничные условия для касательных составляющих векторов электромагнитного поля.
3. Каким образом можно физически объяснить возникновение граничных условий на границе идеального диэлектрика и идеального проводника для тангенциальных составляющих?

4. Каким образом можно физически объяснить возникновение граничных условий на границе двух идеальных диэлектриков для тангенциальных составляющих?
5. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.
6. Каким образом можно физически объяснить возникновение граничных условий на границе идеального диэлектрика и идеального проводника для нормальных составляющих?
7. Каким образом можно физически объяснить возникновение граничных условий на границе двух идеальных диэлектриков для нормальных составляющих?
8. Граничные условия для векторов поля на границе раздела с идеальным проводником.

1.4 Энергетические соотношения в электромагнитном поле

1.4.1 Теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной и интегральной форме. Физический смысл слагаемых

Впервые энергетические соотношения, характеризующие энергию поля в любой точке пространства, были получены русским физиком Н.А.Умовым вообще и английским физиком Д.Пойнтингом для ЭМП.

Для определения этих соотношений воспользуемся 1-м и 2-м уравнениями Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Поскольку оба уравнения справедливы одновременно в любой точке пространства для одного и того же ЭМП, то первое из них скалярно умножим на \bar{E} , второе – на \bar{H} и вычтем из первого второе:

$$\bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = \bar{J} \bar{E} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (1.50)$$

Преобразуем (1.50):

1)

$$\operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}] = (\nabla [\bar{E}, \bar{H}]) - \bar{H} [\nabla, \bar{E}] - \bar{E} [\nabla, \bar{H}] = \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = -\operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}];$$

$$2) \bar{E} = (\bar{E}_{\text{np}} + \bar{E}_{\text{ct}}) \Rightarrow \bar{E} = \bar{J} / \sigma - \bar{E}_{\text{ct}}, \text{ тогда } \bar{J} \bar{E} = \bar{J}^2 / \sigma - \bar{J} \bar{E}_{\text{ct}};$$

$$3) \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{E} \frac{\partial \epsilon_a \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_a E^2}{2};$$

$$4) \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{H} \frac{\partial \mu_a \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2}.$$

С учетом условий 1–4 после перестановки некоторых членов (1.50) записывается как

$$\bar{J} \bar{E}_{\text{ct}} = \frac{J^2}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} \right) + \operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}]. \quad (1.51)$$

Выражение (1.51) – *дифференциальная форма* записи закона сохранения энергии ЭМП (теорема Умова-Пойнтинга).

Дифференциальная форма теоремы Умова-Пойнтинга связывает векторы ЭМП с токами, возбуждающими это поле, с токами, им создаваемыми, и параметрами среды в каждой точке пространства. Она выражает закон сохранения энергии для ЭМП в любой точке пространства. Все слагаемые, входящие в формулу, имеют размерность Вт/м³ и характеризуют сумму объемных плотностей энергии ЭМП в данной точке пространства.

Для более наглядного анализа и выявления физического смысла формулу (1.51) представим в интегральной форме, для чего проинтегрируем ее по некоторому объему пространства V, ограниченному поверхностью S

$$\int_V \mathbf{J} \bar{\mathbf{E}}_{\text{ст}} dV = \int_V \mathbf{J}^2 / \sigma dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} dV + \int_V \text{div}[\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}] dV,$$

эта формула при применении теоремы Остроградского-Гаусса к последнему слагаемому $\oint_S \bar{\mathbf{A}} dS = \int_V \text{div} \bar{\mathbf{A}} dV$ примет окончательный вид:

$$\int_V \mathbf{J} \bar{\mathbf{E}}_{\text{ст}} dV = \int_V \mathbf{J}^2 / \sigma dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} dV + \oint_S [\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}] d\bar{\mathbf{S}} \quad (1.52)$$

Выражение (1.52) – *интегральная форма* записи теоремы Умова-Пойнтинга.

В формуле (1.52):

1-й интеграл: $P_{\text{ст}}$ – мощность, выделяемая сторонними источниками в объеме V;

2-й интеграл: $P_{\text{пот}}$ – мощность тепловых потерь в объеме V;

3-й интеграл: $\frac{\partial W_{\text{ЭМП}}}{\partial t}$ – изменение во времени энергии ЭМП, запасен-

ной в объеме V; $\frac{\epsilon_a E^2}{2} = W_{\text{эл}}$; $\frac{\mu_a H^2}{2} = W_{\text{мп}}$ – объемные плотности энергии соответственно электрического и магнитного полей за единицу времени; $W_{\text{эл}}$ и $W_{\text{мп}}$ характеризуют энергию ЭМП в данной точке пространства.

4-й интеграл: $P_{\text{изл}}$ – мощность излучения через замкнутую поверхность $\bar{\mathbf{S}}$; векторное произведение $[\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}] = \bar{\mathbf{S}}$ – вектор Пойнтинга (плотность потока мощности ЭМП в данной точке пространства). Направление вектора $\bar{\mathbf{S}}$ указывает направление движения ЭМВ (направление переноса энергии), а величина вектора $\bar{\mathbf{S}}$ характеризует мощность волнового движения поля в данной точке пространства. Энергия поступает в объем V, если знак этого слагаемого положителен и, наоборот, уходит из объема, если знак отрицателен.

Итак, формулу (1.52) можно записать в общем виде

$$P_{\text{ст}} = P_{\text{пот}} + \frac{\partial W_{\text{ЭМП}}}{\partial t} + P_{\text{изл}} . \quad (1.53)$$

Сформулируем окончательно теорему Умова-Пойнтинга: мощность $P_{\text{ст}}$ выделяемая сторонними источниками в объеме V , расходуется на тепловые потери $P_{\text{пот}}$, на изменение энергии $W_{\text{ЭМП}}$ в объеме V и на излучение электромагнитной энергии (ЭМЭ) через поверхность S , ограничивающую объем V .

Эта форма записи более наглядна физически и выражает закон сохранения энергии в некотором физическом объеме V .

Первое следствие из формулы (1.53) при $P_{\text{ст}}=0$

$$\frac{\partial W_{\text{ЭМП}}}{\partial t} = -P_{\text{пот}} - P_{\text{изл}} . \quad (1.54)$$

Запасенная в объеме V энергия $W_{\text{ЭМП}}$ расходуется на тепловые потери и на излучение мощности через поверхность S , ограничивающую объем V (рисунок 1.15).

Второе следствие из формулы (1.53) при $P_{\text{ст}}=0$

$$P_{\text{изл}} = -P_{\text{пот}} - \frac{\partial W_{\text{ЭМП}}}{\partial t} . \quad (1.55)$$

Мощность, поступающая через поверхность S в объем V , расходуется на тепловые потери и на изменение энергии $W_{\text{ЭМП}}$ в объеме V (рисунок 1.15).

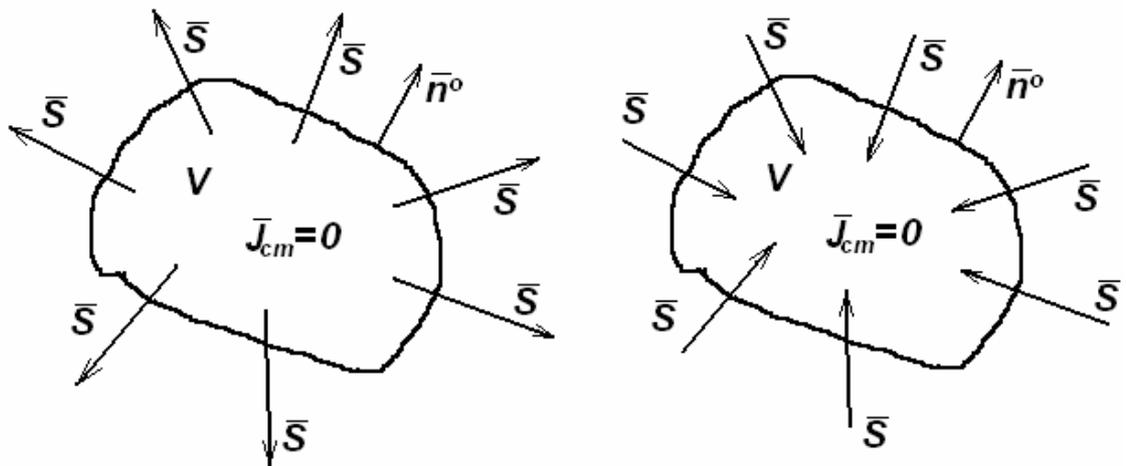


Рисунок 1.15 – Баланс энергии, запасенной в объеме и поступающей в объем при отсутствии источников

Вывод из теоремы Умова-Пойнтинга: созданное в течение некоторого времени сторонним источником быстропеременное ЭМП может в дальней-

шем существовать самостоятельно и распространяться в виде ЭМВ, осуществляя при этом перенос ЭМЭ от одной точки пространства в другую. При этом распространение ЭМВ представляет многократный процесс взаимных превращений энергии волнового движения Гюйгенса). Причем, если $\sigma \neq 0$, то каждый очередной цикл взаимных превращений этих энергий сопровождается потерями энергии. Свойство ЭМВ переносить ЭМЭ широко используется во многих областях радиотехники (радиолокация, связь, телевидение и т.д.).

1.4.2 Комплексный вектор Пойнтинга

Как было показано, $\bar{S} = [\bar{E}, \bar{H}]$, что можно записать, используя метод комплексных амплитуд:

$$\bar{S} = [\operatorname{Re} \dot{E}, \operatorname{Re} \dot{H}] \quad (1.56)$$

Учитывая, что $\dot{A} + \dot{A}^* = 2 \operatorname{Re} \dot{A}$, где \dot{A} - произвольная комплексная величина, \dot{A}^* - ее комплексная сопряженная величина, можем записать что

$$\operatorname{Re} \dot{E} = \frac{\dot{E} + \dot{E}^*}{2}; \quad \operatorname{Re} \dot{H} = \frac{\dot{H} + \dot{H}^*}{2}. \quad (1.57)$$

Учитывая это, получим

$$\bar{S} = \left[\frac{\dot{E} + \dot{E}^*}{2}, \frac{\dot{H} + \dot{H}^*}{2} \right].$$

Произведем перемножение векторов:

$$\dot{S} = \left\{ [\dot{E}, \dot{H}] + [\dot{E}, \dot{H}^*] + [\dot{E}^*, \dot{H}] + [\dot{E}^*, \dot{H}^*] \right\}.$$

Учитывая, что согласно выражению (1.57)

$$[\dot{E}, \dot{H}] + [\dot{E}^*, \dot{H}^*] = 2 \operatorname{Re} [\dot{E}, \dot{H}],$$

$$[\dot{E}, \dot{H}^*] + [\dot{E}^*, \dot{H}] = 2 \operatorname{Re} [\dot{E}, \dot{H}^*],$$

получим

$$\bar{S} = \frac{1}{4} \left\{ 2 \operatorname{Re} [\dot{E}, \dot{H}] + 2 \operatorname{Re} [\dot{E}, \dot{H}^*] \right\}.$$

Подставив в полученное выражение:

$$\dot{E} = \dot{E}_0 e^{j\omega t}, \quad \dot{H} = \dot{H}_0 e^{j\omega t}, \quad \dot{H}^* = \dot{H}_0^* e^{-j\omega t}.$$

В результате подстановки получим

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Re} \left[\dot{\bar{E}}_0, \dot{\bar{H}}_0 \right] e^{j2\omega t} + 2 \operatorname{Re} \left[\dot{\bar{E}}_0, \dot{\bar{H}}_0^* \right] \right\}.$$

Первое слагаемое в скобках изменяется по времени по гармоническому закону с частотой 2ω . Второе слагаемое не зависит от времени. Обычно интерес представляет значение вектора Пойнтинга, усредненное за период колебания T , которое будет обозначать как \bar{S}_{cp} .

Среднее за период значение первого слагаемого равно нулю, поэтому можно записать

$$\bar{S}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\bar{E}}_0, \dot{\bar{H}}_0^* \right],$$

опуская индекс "0", окончательно получим

$$\bar{S}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{H}}^* \right], \quad (1.58)$$

или в комплексном виде

$$\dot{\bar{S}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{H}}^* \right]. \quad (1.59)$$

Вектор $\dot{\bar{S}}$ называют комплексным эквивалентом вектора Пойнтинга.

Аналогично выражаются через комплексные амплитуды и другие квадратичные величины:

плотность энергии электрического поля

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\epsilon_a \left(\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{E}}^* \right)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\epsilon_a |\dot{\bar{E}}|^2}{2} = \frac{\epsilon_a}{4} |\dot{\bar{E}}|^2; \quad (1.60)$$

плотность энергии магнитного поля

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\mu_a \left(\dot{\bar{H}}, \dot{\bar{H}}^* \right)}{2} = \frac{\mu_a}{4} |\dot{\bar{H}}|^2. \quad (1.61)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Получить выражение для энергетических соотношений в электромагнитном поле, используя 1-е и 2-е Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.
2. Теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме.
3. Теорема Умова-Пойнтинга в интегральной форме. Физический смысл слагаемых.
4. Что выражает теорема Умова-Пойнтинга в интегральной форме?

5. Первое следствие из теоремы Умова-Пойнтинга в интегральной форме при отсутствии сторонних токов и его физический смысл.
6. Второе следствие из теоремы Умова-Пойнтинга в интегральной форме при отсутствии сторонних токов и его физический смысл.
7. Вывод из теоремы Умова-Пойнтинга.
8. Каким образом вводится комплексный вектор Пойнтинга?
9. Выражения для плотности энергии электрического поля в действительной и комплексной формах.
10. Выражения для плотности энергии магнитного поля в действительной и комплексной формах.

1.5 Основные законы электростатики, стационарного электрического поля и магнитного поля постоянного тока

В общем случае электромагнитные поля создаются переменными токами и зарядами высокой частоты. Они описываются полной системой уравнений Максвелла. Заметим, что быстропеременное поле включает в себя другие более частные случаи. Поэтому, казалось бы, можно прямо обратиться к изучению быстропеременных полей. Однако по ряду причин это делать нецелесообразно.

Во-первых, существует очень много важных практических задач, относящихся к каждой группе электромагнитных явлений, и поэтому изучение каждого из полей представляет самостоятельный интерес. Вместе с тем последовательное изучение электромагнитных явлений по мере их усложнения не дробит общую картину электромагнетизма, так как все явления рассматриваются как частные случаи общих закономерностей, выражаемых уравнениями Максвелла.

Во-вторых, при переходе от предыдущей к последующей группе электромагнитных явлений усложняется методика расчета. Процесс изучения электродинамики путем решения все более сложных задач позволяет овладеть методикой расчета и облегчает овладение предметом.

Отметим, что исторически именно так и происходило овладение теорией электромагнетизма. Но тогда переход от изучения одной группы явлений к последующей диктовался новыми физическими открытиями в области электромагнетизма. В самом деле, изучение круга задач, связанных с переходом от статических полей к полям стационарным, было вызвано открытиями Гальвани и Вольта постоянного тока и Эрстедом – магнитного поля тока. Переход от полей стационарных к квазистационарным потребовался вследствие открытия Фарадеем явления электромагнитной индукции. Наконец, переход к быстропеременным полям обусловлен теоретическим предсказанием тока смещения Максвеллом. Изучение основных свойств быстропеременного поля и возможности его создания (излучения) является центральной проблемой электродинамики высоких и сверхвысоких частот и имеет исключительно важное значение для радиотехники и радиолокации.

1.5.1 Основные свойства электростатического поля

Статические поля характеризуются тем, что векторы поля, заряды, положение заряженных и намагниченных тел с течением времени не изменяются.

Так как в каждой точке пространства ни одна из электромагнитных характеристик не зависит от времени и заряды в поле не перемещаются, то всегда

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{v} = 0.$$

Из выражений (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) следует, что и плотность тока везде равна нулю

$$\bar{j} = \rho \bar{v} = 0,$$

то есть в статическом поле макроскопические токи не протекают. Система уравнений Максвелла для этого случая разбивается на две независимые подсистемы:

в интегральной форме

$$\left. \begin{aligned} \int_{\ell} \bar{E} d\bar{\ell} = 0 \\ \int_s \bar{D} d\bar{S} = q \end{aligned} \right\} ; \quad (1.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\ell} \bar{H} d\bar{\ell} = 0 \\ \int_s \bar{B} d\bar{S} = 0 \end{aligned} \right\} ; \quad (1.63)$$

$$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H};$$

в дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{E} = 0, \\ \text{div} \bar{D} = \rho, \end{aligned} \right\} ; \quad (1.62a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{H} = 0, \\ \text{div} \bar{B} = 0. \end{aligned} \right\} ; \quad (1.63a)$$

$$\bar{D} = \epsilon_\alpha \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_\alpha \bar{H}.$$

Граничные условия вследствие отсутствия токов сводятся к

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_s; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Математическая независимость подсистем (1.62) и (1.63) означает, что в статическом поле разрушена физическая связь между электрическими и магнитными явлениями. Можно, например, положить $\bar{H} = 0$ (то есть допустить, что магнитного поля нет совсем). При этом никаких изменений в подсистеме (1.62) не произойдет, а это и означает, что статическое электрическое поле совершенно не зависит от постоянных магнитных полей. Это свойство подсистем (1.62) и (1.63) объясняет тот исторический факт, что пока были известны лишь статические поля, электричество и магнетизм считали различными явлениями природы.

С математической точки зрения подсистема (1.62a) несколько более общая, чем (1.63a): в первой из них правая часть уравнения для дивергенции

является некоторой функцией координаты, во второй – она равна нулю. А остальном различие систем сводится к различию обозначений. Сходство подсистем свидетельствует, что статистические электрические и магнитные поля обладают многими одинаковыми физическими свойствами. Более того, поскольку подсистема (1.62а) более общая ($\rho \neq 0$), можно утверждать, что круг реализуемых электростатических полей шире, чем магнитостатических.

Несмотря на то, что уравнения (1.62) и (1.63) достаточно просты, их непосредственное решение связано с громоздкими выкладками. В самом деле, запишем эти уравнения, например, в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho;$$

$$D_x = \varepsilon_\alpha E_x, \quad D_y = \varepsilon_\alpha E_y, \quad D_z = \varepsilon_\alpha E_z.$$

Неизвестными являются E_x , E_y и E_z . Легко видеть, что процесс исключения неизвестных из систем весьма громоздок. Поэтому для решения такого рода задач используют вспомогательную функцию.

Учитывая первое уравнение (1.62а), утверждающее, что электростатическое поле является безвихревым, можно сделать подстановку

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi, \quad (1.64)$$

так как всегда $\text{rot grad}\varphi \equiv 0$.

Вспомогательную функцию называют *электростатическим потенциалом* – φ .

Выясним, какому уравнению подчиняется потенциал. Для этого подставим (1.64) во второе уравнение (1.62а). Для однородной среды ($\varepsilon_\alpha = \text{const}$) будем иметь

$$\varepsilon_\alpha \text{div grad}\varphi = -\rho,$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_\alpha}. \quad (1.65)$$

Соотношение (1.65) называется уравнением Пуассона. В тех точках, где заряд отсутствует ($\rho = 0$) уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1.66)$$

Отметим основное преимущество метода потенциала. При расчете поля системы зарядов очень часто пользуются принципом суперпозиции: сначала рассчитывают поле каждого заряда, а затем результаты суммируют. Приме-

нение метода суперпозиции для скалярных величин проще, чем для векторных.

Выясним, какими свойствами обладает потенциал.

1. Потенциал должен быть непрерывной функцией. В противном случае в точках нарушения непрерывности потенциала напряженность поля принимала бы бесконечное значение, что невозможно.

2. В соответствии с граничными условиями для E_τ (1.36) и D_n (1.45) потенциал удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}; \quad (1.67)$$

и

$$\varepsilon_{\alpha 1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{\alpha 2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho S. \quad (1.68)$$

3. Потенциал электростатического поля определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C , поскольку

$$\text{grad} \varphi = \text{grad}(\varphi + C) = -E.$$

Поэтому потенциалом может быть как функция φ , так и $\psi = \varphi + C$. Такое положение дает возможность для каждой задачи выбирать наиболее удобное значение C .

Поверхности $\varphi = \text{const}$ называются эквипотенциальными. Вектор E в каждой точке нормален к эквипотенциальной поверхности и направлен в сторону убывания потенциала. Что касается вектора $\text{grad} \varphi$, то он по смыслу совпадает с направлением максимального роста потенциала, то есть противоположен вектору E . Отсюда знак "-" в (1.64). Установим связь между φ и E в форме, отличной от (1.64). Выразим потенциал в произвольной точке M через потенциал поля в некоторой другой точке O . Соединим точки O и M произвольной кривой. Изменение потенциала на элементарном участке кривой определится соотношением

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \text{grad} \varphi \cdot l^0 \cdot dl = \text{grad} \varphi \cdot dl.$$

Теперь φ_M может быть рассчитан так:

$$\varphi_M = \varphi_0 + \int_0^M d\varphi = \varphi_0 + \int_0^M \text{grad} \varphi \cdot dl.$$

С учетом (1.64) получим

$$\varphi_M = \varphi_0 - \int_0^M Edl = \varphi_0 + \int_M^0 Edl. \quad (1.69)$$

Так как в электростатическом поле всюду $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, то по любому контуру $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$. Поэтому потенциал φ_M зависит только от положения точки M и не зависит от пути, по которому вычисляется интеграл в (1.69).

Используя свойство однозначности потенциала, положим потенциал φ_0 точки O равным нулю, тогда формула (1.69) примет вид

$$\varphi_M = \int_M^0 \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.70)$$

4. Выражение (1.70) позволяет выяснить физический смысл потенциала. Так как для точечного заряда сила $F_3 = q_0 \mathbf{E}$, работа по перемещению q_0 на пути $d\mathbf{l}$ будет

$$dA = F_3 d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} d\mathbf{l} = -q_0 d\varphi.$$

Тогда работа на пути $M_1 M_2$ определится соотношением

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} q_0 d\varphi = q_0 (\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}). \quad (1.71)$$

Соотношение (1.71) указывает на то, что и работа сил электростатического поля по перемещению зарядов из одних точек в другие определяется только положением этих точек в пространстве. Положив $q_0 = 1$, получим $A = \varphi_{M_1} - \varphi_{M_2} = U$.

Следовательно, электростатический потенциал – энергетическая характеристика поля. Разность потенциалов (напряжение U) между двумя точками определяет работу, затрачиваемую при перемещении единичного заряда из одной точки во вторую.

Энергия электростатического поля в некотором объеме может быть вычислена по формуле (1.50). Эта формула, как известно, характеризует часть энергии поля, заключенной в объеме V в данный момент. В случае электростатического поля $\mathbf{E} = \text{const}$ и

$$W = W_3 = \int_v \frac{\epsilon_\alpha \mathbf{E}^2}{2} dV = \text{const}. \quad (1.72)$$

Отметим, что вычисление энергии часто бывает удобнее производить по формуле (1.72), требующей знания напряженности \mathbf{E} в каждой точке пространства, окружающего заряды, а иначе, приведя подынтегральное выражение (1.72) к виду

$$\epsilon_\alpha \mathbf{E}^2 = \epsilon_\alpha \bar{\mathbf{E}}^2 = \epsilon_\alpha \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = -\bar{\mathbf{D}} \cdot \text{grad} \varphi. \quad (1.73)$$

Учтем, что

$$\text{div}(\varphi \bar{\mathbf{D}}) = \bar{\mathbf{D}} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \bar{\mathbf{D}}, \text{ а } \text{div} \bar{\mathbf{D}} = \rho.$$

Тогда

$$\epsilon_\alpha \mathbf{E}^2 = -\text{div}(\bar{\mathbf{D}} \varphi) + \varphi \text{div} \bar{\mathbf{D}} = -\text{div} \varphi \bar{\mathbf{D}} + \varphi \rho. \quad (1.74)$$

Подставив (1.74) в (1.72), получаем

$$W_3 = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int_V \frac{\operatorname{div} \varphi \bar{D}}{2} dV.$$

После замены второго интеграла по теореме Остроградского-Гаусса, приходим к соотношению

$$W_3 = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS, \quad (1.75)$$

здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V .

Пусть заряды, создающие поле, сосредоточены в ограниченной области. Распространим интегрирование на все окружающее пространство. В этом случае в качестве поверхности S взять сферу с центром где-то среди зарядов и при достаточно большом радиусе весь заряд считать точечным. Тогда φ и модуль D убывают с расстоянием как $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r^2}$ соответственно, а поверхность сферы S возрастает пропорционально r^2 . Таким образом, $\oint_S \frac{\varphi D_n}{2} dS$ при $S \rightarrow \infty$ убывает как $\frac{1}{r}$ и в пределе равен нулю.

Итак, энергия электростатического поля при непрерывном распределении зарядов с плотностью ρ равна

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq. \quad (1.76)$$

При этом, как видно, интегрирование распространяется фактически на область V , которая содержит заряд ($\rho \neq 0$). Полная энергия электростатического поля выражена, таким образом, через источники поля – заряды.

Если электростатическое поле создается поверхностными зарядами, распределенными по поверхности S с плотностью ρ_s , то выражение для электростатической энергии принимает вид

$$W_3 = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \rho_s dS. \quad (1.77)$$

В случае заряженного проводника $\varphi = \text{const}$, а $\oint_S \rho_s dS = q$. Поэтому

$$W_3 = \frac{1}{2} \varphi q. \quad (1.78)$$

Потенциал φ уединенного проводника зависит от величины имеющегося на нем заряда q , а также от его размеров и формы. Отношение заряда к потенциалу остается постоянным при любом значении q и называется емкостью уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (1.79)$$

С учетом (1.78) и (1.79) для энергии уединенного проводника получаем

$$W_э = \frac{1}{2} C \phi^2. \quad (1.80)$$

1.5.2 Стационарное электрическое поле

Поле называется стационарным, если все физические величины, характеризующие электромагнитный процесс, в каждой точке сохраняют одно и то же значение. Стационарное поле отличается от статического тем, что в нем допустимо движение зарядов. Поскольку движение зарядов означает наличие тока и непременно связанного с ним магнитного поля, могут существовать совместно как электрическое, так и магнитное поле.

Условия стационарности математически формулируются так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \bar{j} = \text{const} \neq 0.$$

Тогда система уравнений Максвелла переходит в систему следующих уравнений:

в интегральной форме

$$\left. \begin{aligned} \oint_1 \bar{E} d\bar{l} &= 0, \\ \oint_s \bar{D} d\bar{S} &= q, \end{aligned} \right\}; \quad (1.81)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_1 \bar{H} d\bar{l} &= \bar{i}, \\ \oint_s \bar{B} d\bar{S} &= 0, \end{aligned} \right\}; \quad (1.82)$$

$$\bar{D} = \epsilon_\alpha \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_\alpha \bar{H}; \quad \bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

в дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{E} &= 0, \\ \text{div} \bar{D} &= \rho, \end{aligned} \right\}; \quad (1.81a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= \bar{j}, \\ \text{div} \bar{B} &= 0. \end{aligned} \right\}; \quad (1.82a)$$

$$\bar{D} = \epsilon_\alpha \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu_\alpha \bar{H}, \quad \bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

Граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_S; \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_S, \quad B_{1n} = B_{2n},$$

то есть в них должен быть учтен поверхностный ток.

Плотность тока \vec{j} наравне с другими величинами в каждой точке постоянна. По этой причине стационарное поле называют также полем постоянных токов. В отличие от статических полей подсистемы уравнений электрического (1.81) и магнитного поля (1.82) связаны между собой посредством закона Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Приступая к изучению стационарного поля, отметим, что здесь электрическое и магнитное поля уже связаны между собой посредством закона Ома в дифференциальной форме.

Сначала исследуем электрическое поле и произведем сравнение этого поля с электростатическим. После расчета \vec{E} и \vec{j} окажется возможным исследовать и магнитное поле.

Условие существования стационарного поля вытекает из закона сохранения заряда (1.25). При условии стационарности $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ получаем

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.83)$$

Следовательно, в стационарном поле линии тока проводимости должны быть непрерывными.

1.5.2.1 Сравнение стационарного электрического поля с электростатическим

1. В отличие от электростатического в стационарном поле внутри проводника, по которому течет ток ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$), напряженность $E \neq 0$.

2. Так как внутри проводника $E_1 \neq 0$, то в соответствии с формулой (1.81) в разных точках проводника потенциал ϕ_1 имеет различные значения, т.е. проводник не является эквипотенциальной областью. Отсюда вектор E в прилежащем к проводнику диэлектрике уже не будет перпендикулярен к поверхности проводника с током.

3. В стационарном поле в области, где действуют сторонние силы ($E_{ct} \neq 0$), объемный заряд существует и внутри проводника. В самом деле, применим оператор дивергенции к выражению (1.26)

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{ct}) = \sigma \operatorname{div} (\vec{E} + \vec{E}_{ct}) + (\vec{E} + \vec{E}_{ct}) \operatorname{grad} \sigma = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_a} + \sigma \frac{\rho}{\epsilon_a} + \sigma \operatorname{div} \vec{E}_{ct} = 0,$$

поскольку в изотропном проводнике $\operatorname{grad} \sigma = 0$, а согласно (1.27) для стационарного поля $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Отсюда в проводящей среде

$$\rho = -\epsilon_a \operatorname{div} \bar{E}_{\text{ст}} \neq 0.$$

Перечисленные выше качественные отличия стационарного электрического поля от поля электростатического всегда будут существовать. Однако количественные различия могут быть очень незначительными. Это в особенности относится к полю в диэлектрике, окружающем хорошие проводники.

1.5.2.2 Квазистационарное поле

Область квазистационарных (как бы стационарных) явлений характеризуется тем, что по сравнению с током проводимости ток смещения играет весьма слабую роль во взаимодействии с магнитным полем. В то же время для этих процессов наличие переменного магнитного поля существенно. Стало быть квазистационарные явления – это такие явления, для которых можно принять

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \approx 0, \text{ но } \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0.$$

Снятие ограничения $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ означает, что учитывается явление электромагнитной индукции Фарадея. Пренебрежение током смещения означает, что принимается во внимание магнитное поле, созданное лишь током проводимости. Оба эти момента характерны для полей, сравнительно медленно изменяющихся во времени. Таким образом, квазистационарная теория – это приближенная теория медленно изменяющихся переменных полей.

Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении принимает следующий вид:
в интегральной форме

$$\left. \begin{aligned} \oint_1 \bar{H} d\bar{l} &\approx \bar{i}, & \oint_s \bar{D} d\bar{S} &= q, \\ \oint_1 \bar{E} d\bar{l} &= -\frac{d}{dt} \int_s \bar{B} d\bar{S}, & \oint_s \bar{B} d\bar{S} &= 0; \\ \bar{B} &= \mu_\alpha \bar{H}, & \bar{D} &= \epsilon_\alpha \bar{E}, & \bar{j} &= \sigma \bar{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

в дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &\approx \bar{j}, & \operatorname{div} \bar{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \bar{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

$$\bar{B} = \mu_\alpha \bar{H}, \quad \bar{D} = \epsilon_\alpha \bar{E}, \quad \bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

Из рассмотрения системы видно, что в области квазистационарных полей электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать отдельно. Однако

здесь учитывается лишь одна связь, осуществляемая явлением электромагнитной индукции Фарадея. Другая связь через токи смещения в квазистационарных полях весьма слабая, и потому не учитывается.

Пренебрежение током смещения означает, что самоподдерживающийся электромагнитный процесс в диэлектрике, т.е. распространение электромагнитных волн, допускаемых формулами (1.16), (1.19), становится невозможным. Это положение характерно для электродинамики домаксвеллова периода. Таким образом, можно утверждать, что квазистационарное приближение - это приближенная теория переменных полей, пренебрегающая волновым характером электромагнитных процессов.

Как и в области стационарных явлений, для решения многих задач удобно ввести в рассмотрение потенциалы. Исходя из четвертого уравнения в (1.85), можно принять

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.86)$$

Подстановка (1.81) в (1.80) дает

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{\mathbf{A}} = -\text{rot} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} \\ \text{rot} \left(\bar{\mathbf{E}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\bar{\mathbf{E}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\text{grad} \varphi,$$

или

$$\bar{\mathbf{E}} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t}. \quad (1.87)$$

Итак, вектор \mathbf{E} содержит теперь потенциальную - $\nabla \varphi$ и вихревую $-\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t}$ части; последняя учитывает явление электромагнитной индукции. Подставляя (1.86) в (1.85), получим, заменив $\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \bar{\mathbf{B}}$,

$$\text{rot} \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{j}},$$

или

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu_a \bar{\mathbf{j}}. \quad (1.88)$$

Здесь, как и в стационарном поле, принято

$$\text{div} \mathbf{A} = 0. \quad (1.89)$$

Уравнение 3 в (1.85) с учетом $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$ преобразуется так:

$$\operatorname{div} \varepsilon_a \bar{\mathbf{E}} = \operatorname{div} \varepsilon_a \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_a \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = \rho .$$

Используя (1.89), получаем уравнение для скалярного потенциала

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (1.90)$$

Как видно, уравнения для потенциалов (1.88) и (1.90) внешне полностью совпадают с уравнениями для статических полей. Значит, и свойства полей, то есть их связь с зарядами и токами, а также структура должны быть такими же, как в статике.

Однако имеется и принципиальное отличие квазистационарных уравнений (1.88) и (1.90) от уравнений статических. Электрические величины в (1.88) и (1.90) зависят от времени, при этом дифференцирование по времени здесь не производится. Это означает, что с математической точки зрения время входит в (1.88) и (1.90) как параметр. Поэтому в каждый фиксированный момент квазистационарное поле точно совпадает со статическим, соответствующим значениям \mathbf{j} и ρ в этот же момент. Изменение \mathbf{j} и ρ с течением времени приводит к тому, что статические поля сменяют друг друга сразу по всему пространству в такт с \mathbf{j} и ρ . Это обстоятельство и оправдывает название группы явлений – квазистационарные. Допущение об одновременности изменения поля в точке наблюдения с изменением источников равноценно допущению о бесконечной скорости распространения возбуждений, что характерно для теории дальнего действия.

Указанные особенности поля особенно отчетливо видны из решений уравнений (1.88) и (1.90). Рассмотрим, например, потенциал $d\varphi$ в точке M , создаваемый переменным зарядом ρdV , расположенным в точке M' . Поскольку решение уравнения Пуассона известно, можно сразу записать

$$d\varphi(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{\rho(M',t)}{r} dV . \quad (1.91)$$

Левая и правая части уравнения являются функциями различных точек M и M' , находящихся на расстоянии r . Вместе с тем они относятся к одному и тому же моменту времени t . Таким образом, из выражения (1.91) следует, что любое изменение ρ в M' сразу изменяет $d\varphi$ в M , как бы ни было велико расстояние r . Значит, здесь, в самом деле, используются представления теории дальнего действия. Однако в действительности, как известно из общей теории, электромагнитные воздействия распространяются с запаздыванием и $t_{\text{зап}} = \frac{r}{v}$.

Квазистационарное рассмотрение, таким образом, связано с пренебрежением временем запаздывания.

Ниже будет показано, что это допустимо во всей области пространства вокруг источника, линейные размеры r которой малы по сравнению с длиной

волны λ излучаемых колебаний. То есть, условия квазистационарности выполняются, если $r \ll \lambda$.

1.5.3 Магнитное поле постоянного тока (стационарное магнитное поле)

Расчет стационарного поля вектора \vec{H} производится точно так же, как и электрического, поскольку исходные уравнения совпадают. Значение \vec{E} позволяет определить \vec{j} по формуле (1.85). Поэтому в дальнейшем \vec{j} можно считать известным.

В отличие от электрического поля магнитное поле постоянного тока в точках, где $\vec{j} \neq 0$, является вихревым. Поэтому для решения второй подсистемы (1.85) скалярный потенциал ввести уже нельзя. Однако можно воспользоваться тем, что $\text{div } \vec{D} = 0$ во всех точках, а поскольку $\text{div rot } \vec{A} = 0$, целесообразно ввести векторный потенциал \vec{A} , полагая

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{A}. \quad (1.92)$$

Поскольку $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, получаем для векторного потенциала уравнение

$$\frac{1}{\mu_a} \text{rot rot } \vec{A} = \vec{j}. \quad (1.93)$$

Воспользовавшись тождеством $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, получим

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{j}. \quad (1.94)$$

Уравнение (1.94) можно упростить, если учесть, что поле вектора \vec{A} определено не полностью, соотношение (1.92) определяет лишь распределение вихрей \vec{A} и не налагает никаких требований на источники \vec{A} . Для полного же определения векторного поля необходимо знать как его ротор, так и дивергенцию. Это позволяет потребовать, чтобы

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Тогда уравнение (1.94) упрощается и принимает вид

$$\nabla^2 \vec{A} = - \mu_a \vec{j}. \quad (1.95)$$

Это уже известное уравнение Пуассона, но в векторной форме. Его решение

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV. \quad (1.96)$$

Здесь r – расстояние от элемента dV с распределенным по нему током \vec{j} до точки наблюдения, в которой вычисляется потенциал.

Соотношение (1.96) верно уже для любой системы координат и позволяет находить векторный потенциал при произвольном распределении тока. Поскольку задача расчета \bar{A} сведена к интегрированию, ее можно считать решенной окончательно, так как в принципе интегрирование всегда выполнимо (хотя часто является операцией весьма сложной). После вычисления \bar{A} расчет \bar{B} сводится к вычислению $\text{rot } \bar{A}$ (то есть к всегда выполняемому дифференцированию).

Для вычисления энергии магнитного поля, сосредоточенной в пределах объема V (рисунок 1.5.1), можно воспользоваться соотношением

$$W_M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV. \quad (1.97)$$

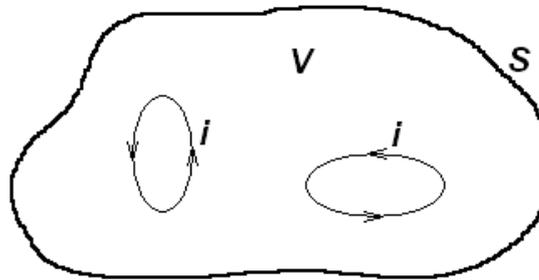


Рисунок 1.5.1 – Энергия магнитного поля постоянного тока

Для подсчета полной энергии магнитного поля эта формула неудобна, так как для ее применения необходимо знать H в каждой точке окружающего токи пространства. Формулу (1.97) можно преобразовать таким образом, чтобы энергия магнитного поля была выражена через токи, заключенные внутри поверхности S , ограничивающей объем V . Для этого заменим $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$. Используя тождество $\text{div}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \text{ rot } \bar{a} - \bar{a} \text{ rot } \bar{b}$ и соотношение $\text{rot } \bar{H} = \bar{j}$, получим

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \text{div}[\bar{A}, \bar{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \bar{j} dV.$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса, найдем

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \bar{j} dV + \frac{1}{2} \oint_S [\bar{A}, \bar{H}] dS. \quad (1.98)$$

Выбирая в качестве поверхности S сферу радиуса r и устремив r к бесконечности, вычислим полную энергию магнитного поля, создаваемого данными токами.

При удалении точек поверхности на бесконечность каждый замкнутый проводник будет представлять собой магнитный диполь, векторный потенци-

ал его будет изменяться как $\frac{1}{r^2}$, а создаваемая в точках поверхности напряженность H как $\frac{1}{r^3}$ (см. формулу (1.77)). При этом поверхность S возрастает пропорционально r^2 . Следовательно, поверхностный интеграл в выражении (1.98) будет иметь порядок $\frac{1}{r^3}$, стремясь к нулю при $r \rightarrow \infty$. В результате получим

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \bar{A} \bar{j} dV. \quad (1.99)$$

Если проводник линейный, то

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \bar{A} \bar{j} dV = \oint_1 \int_s \frac{\bar{A} d\bar{l}}{2} j_n dS = \frac{1}{2} \oint_1 \bar{A} d\bar{l} \int_s j_n dS = \frac{1}{2} \oint_1 \bar{A} d\bar{l},$$

так как в пределах интегрирования по поперечному сечению потенциал \bar{A} можно считать постоянным. Применив к криволинейному интегралу теорему Стокса и учтя соотношение (1.92), получаем

$$\oint_1 \bar{A} d\bar{l} = \int_s \text{rot} \bar{A} d\bar{S} = \int_s \bar{B} d\bar{S} = \Phi, \quad (1.100)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий любую поверхность, опирающуюся на контур проводника.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислить основные свойства электростатического поля.
2. Записать систему уравнений Максвелла для электростатического поля.
3. Электростатический потенциал.
4. Записать Уравнение Пуассона.
5. Записать Уравнение Лапласа.
6. Какими свойствами обладает потенциал?
7. Энергия электростатического поля.
8. Записать систему уравнений Максвелла для стационарного электрического поля.
9. Сравнить свойства стационарного электрического и электростатического полей.
10. Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении.
11. Что такое векторный потенциал?
12. Какими свойствами обладает магнитное поле постоянного тока?
13. Как определяется энергия стационарного магнитного поля?

ГЛАВА 2 ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

2.1 Методы решения уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла (УМ) (1.29) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно переменных $\bar{E}, \bar{H}, \bar{J}, \rho$.

Общие решения такой системы можно отыскать различными математическими методами. Выбор того или иного метода зависит от конкретной задачи (характера среды, выбора системы координат, распределения токов и зарядов в пространстве) и не является однозначным, т.е. решать УМ возможно различными методами. Однако различные методы не одинаковы по сложности расчетов, удобству использования для данной конкретной задачи. Рассмотрим некоторые, наиболее часто используемые на практике, методы:

- метод волновых уравнений;
- метод скалярного и векторного потенциалов;
- метод векторов Герца.

2.1.1 Волновые уравнения для векторов поля

Метод волновых уравнений заключается в совместном решении системы УМ путем ряда взаимных подстановок и преобразований. Система УМ в дифференциальной форме согласно методу комплексных амплитуд (1.29)

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + j\omega \epsilon_a \bar{E};$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu_a \bar{H};$$

$$\text{div } \epsilon_a \bar{E} = \rho;$$

$$\text{div } \mu_a \bar{H} = 0.$$

Используем известное тождество $\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$. Тогда 1 и 2 УМ можно преобразовать следующим образом

$$\text{rot rot } \bar{H} = \text{grad div } \bar{H} - \nabla^2 \bar{H};$$

$$\text{rot rot } \bar{E} = \text{grad div } \bar{E} - \nabla^2 \bar{E};$$

$$\text{rot rot } \bar{H} = \text{rot } \bar{J} + j\omega \epsilon_a \text{rot } \bar{E};$$

$$\text{rot rot } \bar{E} = -j\omega \mu_a \text{rot } \bar{H};$$

$$\text{grad div } \bar{H} - \nabla^2 \bar{H} = \text{rot } \bar{J} + j\omega \epsilon_a \text{rot } \bar{E};$$

$$\text{grad div } \bar{E} - \nabla^2 \bar{E} = -j\omega \mu_a \text{rot } \bar{H}.$$

Из 3 и 4 УМ системы (1.29) следует

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_a};$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}} = 0,$$

тогда

$$-\nabla^2 \bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon_a(-j\omega\mu_a \bar{\mathbf{H}});$$

$$\frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon_a} - \nabla^2 \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a(\bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon_a \bar{\mathbf{E}});$$

$$-\nabla^2 \bar{\mathbf{H}} - j\omega\epsilon_a(-j\omega\mu_a \bar{\mathbf{H}}) = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}};$$

$$-\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a(\bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon_a \bar{\mathbf{E}}) = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon_a}.$$

Окончательно

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \bar{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}};$$

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon_a} + j\omega\mu_a \bar{\mathbf{J}}.$$

Обычно обозначают $\omega\sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k$, называют волновым числом, т.к. свойства решений определяются им в значительной мере (физический смысл этой величины будет рассмотрен позднее); и полученные выражения записывают в виде

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + k^2 \bar{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}}; \\ \nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon_a} + j\omega\mu_a \bar{\mathbf{J}}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Система (2.1) – волновые уравнения для векторов ЭМП.

В дальнейшем систему (2.1) решают, учитывая электродинамические параметры среды и функции источников ЭМП.

Некоторые частные случаи:

а) $\bar{\mathbf{J}}_{\text{ст}} \neq 0$, $\rho \neq 0$ и $\sigma = 0$ (среды идеальный диэлектрик) решением уравнений (1.29) будут выражения:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\epsilon_a} + j\omega\mu_a \bar{\mathbf{J}}_{\text{ст}}; \quad \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + k^2 \bar{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot} \bar{\mathbf{J}}_{\text{ст}}, \quad (2.2)$$

неоднородные волновые уравнения (уравнения Гельмгольца) для $\bar{\mathbf{E}}$ и $\bar{\mathbf{H}}$, в которых ∇^2 – оператор Лапласа (лапласиан), в декартовых координатах, например,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad k = \omega\sqrt{\epsilon_a \mu_a} - \text{волновое число};$$

б) если $\bar{\mathbf{J}}_{\text{ст}} = 0$, $\rho_{\text{ст}} = 0$ и $\sigma = 0$ уравнения (2.2) преобразуются в однородные волновые уравнения (уравнения Лапласа)

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0; \quad \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0; \quad (2.3)$$

в) если $\bar{J}_{ct} \neq 0$, $\rho \neq 0$, $\sigma \neq 0$ (среда проводящая), то из 1-го уравнения Максвелла найдем:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}_{ct} + \bar{J} + j\omega \epsilon_a \bar{E} = \bar{J}_{ct} + \sigma \bar{E} + j\omega \epsilon_a \bar{E} = \bar{J}_{ct} + j\omega \left(\epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \bar{E} = \bar{J}_{ct} + j\omega \tilde{\epsilon}_a \bar{E},$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_a \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)$ комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

В этом случае в формулы (2.2), (2.3) k и ϵ_a имеют комплексные значения

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = -\frac{\text{grad} \rho}{\tilde{\epsilon}_a} + j\omega \mu_a \bar{J}_{ct}; \quad \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = -\text{rot} \bar{J}_{ct}; \quad (2.4)$$

д) при $J_{ct} = 0$, $\rho = 0$, $\sigma \neq 0$;

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0; \quad \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0. \quad (2.5)$$

Недостатком метода волновых уравнений является то, что для определения \bar{E} и \bar{H} необходимо решать 6 скалярных неоднородных дифференциальных уравнений 6 частных производных 2-го порядка с достаточно сложными правыми частями для $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$.

2.1.2 Метод скалярного и векторного потенциалов

Уравнения (1.29) решаются с помощью электродинамических векторного \bar{A} и скалярного ϕ потенциалов, связанных между собой калибровкой (условием) Лоренца:

$$\text{div} \bar{A} + j\omega \epsilon_a \mu_a \phi = 0. \quad (2.6)$$

Векторы \bar{E} и \bar{H} связаны с \bar{A} и ϕ следующими соотношениями:

$$\bar{H} = \text{rot} \bar{A} / \mu_a; \quad \bar{E} = -j\omega \bar{A} - \text{grad} \phi. \quad (2.7)$$

Совместным решением волновых уравнений и выражений (2.6), (2.7) являются:

при $\bar{J}_{ct} \neq 0$, $\rho \neq 0$, $\sigma = 0$;

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{J}_{ct}; \quad \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\rho_{ct} / \epsilon_a; \quad (2.8)$$

при $\bar{J}_{ct} = 0$, $\rho = 0$; $\sigma = 0$;

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0; \quad \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0; \quad (2.9)$$

при $\bar{J}_{\text{ст}} \neq 0, \rho \neq 0, \sigma \neq 0;$

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{J}_{\text{ст}}; \quad \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\rho_{\text{ст}} / \tilde{\epsilon}_a. \quad (2.10)$$

На практике формулами (2.6) – (2.7) пользоваться удобнее, т.к. их правые части проще и для определения \bar{E} и \bar{H} необходимо решать четыре скалярных дифференциальных уравнения для A_x, A_y, A_z, φ (вместо 6 по методу волновых уравнений).

2.1.3 Метод векторов Герца

Применяются для определения чисто вихревых ЭМП, когда в качестве источников используются \bar{J}^3 и фиктивные \bar{J}^M .

Если \bar{A} и φ связаны условием Лоренца, то они могут быть выражены через общий для них вектор. В случае если ЭМП создается *электрическим током*, то для определения векторов так называемого поля типа "Е" используется метод *электрического вектора Герца* \bar{Z}_e .

При этом

$$\bar{A} = j\omega\epsilon_a\mu_a\bar{Z}_e; \quad \varphi = -\text{div}\bar{Z}_e. \quad (2.11)$$

Из совместного решения уравнений (2.8) – (2.10) и (2.11) найдем, что волновые уравнения для \bar{Z}_e при $\bar{J}_{\text{ст}}^3 \neq 0, \sigma = 0$

$$\nabla^2 \bar{Z}_e + k^2 \bar{Z}_e = -\bar{J}_{\text{ст}}^3 / j\omega\epsilon_a,$$

решением которого является

$$\bar{E}_e = \text{rot rot}\bar{Z}_e - \bar{J}_{\text{ст}}^3 / j\omega\epsilon_a; \quad \bar{H}_e = j\omega\epsilon_a \text{rot}\bar{Z}_e; \quad (2.12)$$

при $\bar{J}_{\text{ст}}^3 \neq 0; \sigma \neq 0;$

$$\nabla^2 \bar{Z}_e + k^2 \bar{Z}_e = -\bar{J}_{\text{ст}}^3 / j\omega\tilde{\epsilon}_a,$$

решением которого является

$$\bar{E}_e = \text{rot rot}\bar{Z}_e - \bar{J}_{\text{ст}}^3 / j\omega\tilde{\epsilon}_a; \quad \bar{H}_e = j\omega\tilde{\epsilon}_a \text{rot}\bar{Z}_e; \quad (2.13)$$

при $\bar{J}_{\text{ст}}^3 = 0; \sigma = 0;$

$$\nabla^2 \bar{Z}_e + k^2 \bar{Z}_e = 0,$$

решением которого является

$$\bar{E}_e = \text{rot rot} \bar{Z}_e; \quad \bar{H}_e = j\omega \epsilon_a \text{rot} \bar{Z}_e. \quad (2.14)$$

Для определения вихревого ЭМП типа "Н", источником которого является фиктивные магнитные токи $\bar{J}_{\text{ст}}^M$ используется метод магнитного вектора Герца \bar{Z}_h . При этом \bar{A} и ϕ связаны с \bar{Z}_h соотношениями, аналогичными выражениям (2.11). Используя методику, аналогичную той, что использовалась при определении волновых уравнений для \bar{Z}_e , найдем:

а) при $\bar{J}_{\text{ст}}^M \neq 0$, $\sigma \neq 0$ волновые уравнения будут иметь вид, аналогичный уравнениям для электрического вектора Герца

$$\nabla^2 \bar{Z}_h + k^2 \bar{Z}_h = \bar{J}_{\text{ст}}^M / j\omega \mu_a,$$

решениями которого являются

$$\bar{E}_h = -j\omega \mu_a \text{rot} \bar{Z}_h; \quad \bar{H}_h = \text{rot rot} \bar{Z}_h + \bar{J}_{\text{ст}}^M / j\omega \mu_a;$$

б) при $J_{\text{ст}}^M = 0$; $\sigma = 0$;

$$\nabla^2 \bar{Z}_h + k^2 \bar{Z}_h = 0,$$

решениями которого являются

$$\bar{E}_h = -j\omega \mu_a \text{rot} \bar{Z}_h; \quad \bar{H}_h = \text{rot rot} \bar{Z}_h;$$

в) $\bar{J}_{\text{ст}}^M \neq 0$, $\sigma = 0$;

$$\nabla^2 \bar{Z}_h + k^2 \bar{Z}_h = \bar{J}_{\text{ст}}^M / j\omega \mu_a,$$

с решениями

$$\bar{E}_h = -j\omega \mu_a \text{rot} \bar{Z}_h; \quad \bar{H}_h = \text{rot rot} \bar{Z}_h + \bar{J}_{\text{ст}}^M / j\omega \mu_a.$$

Для определения векторов $\bar{E}_{e,h}$, $\bar{H}_{e,h}$ необходимо решать три скалярных дифференциальных уравнения для $Z_{e,h,x}$, $Z_{e,h,y}$, $Z_{e,h,z}$.

2.1.4 Теорема единственности решений уравнений Максвелла

При решении конкретной задачи из множества общих решений необходимо выбрать единственное, удовлетворяющее заданным начальным (граничным) условиям задачи. Ответ на этот вопрос дает теорема единственности.

Из анализа волновых уравнений, полученных при решении уравнений Максвелла каждым из трех методов следует, что они имеют один и тот же вид

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = -\bar{\chi}, \quad (2.15)$$

в котором \bar{F} – одна из векторных величин $\bar{E}, \bar{H}, \bar{A}, \dot{\bar{z}}_e, \dot{\bar{z}}_h$; $\bar{\chi}$ – функция векторного источника. Решение эквивалентно решению 3-х скалярных уравнений

$$\nabla^2 f + k^2 f = -\chi, \quad (2.16)$$

где f – одна из трех проекций $\bar{E}, \bar{H}, \bar{A}, \bar{z}_e, \bar{z}_h$, а также φ, χ – одна из трех проекций \bar{J} , а также ρ_0 . Решение (2.15) получили, складывая решение 3-х скалярных уравнений (2.16), предварительно умножив их соответственно на орты $\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0$. В результате найдем, что значение векторной величины \bar{F} в точке P, удаленной на расстояние r от источника $\bar{\chi}$, расположенной в объеме V, будет определяться формулой

$$\bar{F}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\chi}}{r} e^{-jkr} dV. \quad (2.17)$$

Для определения частных решений (2.15) сделаем следующие преобразования (рисунок 2.1.1):

а)

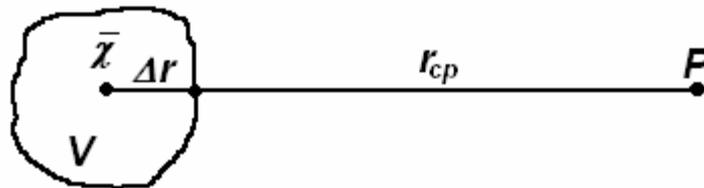


Рисунок 2.1– К выводу частных решений волновых уравнений

Т.к. область V в которой расположен источник $\bar{\chi}$, имеет линейные размеры Δr ; а среднее расстояние от точки P до объема V - r_{cp} , то $r = r_{cp} + \Delta r$.

б)
$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \omega / 1 \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V} = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi f T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

С учетом преобразований а) и б)

$$\bar{F}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\chi}}{r_{cp} + \Delta r} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r_{cp} + \Delta r)} dV.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. $\Delta r \ll r_{cp}$ – точка P значительно удалена от источника, т.е. P находится в дальней зоне.

При этом $r = r_{cp} = \text{const}$, и выражение (2.17) запишется

$$\bar{F}(P) \approx \frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r_{cp}}}{4\pi r_{cp}} \int_V \bar{\chi} e^{-j\frac{2\pi\Delta r}{\lambda}} dV. \quad (2.18)$$

2. $\Delta r \ll r_{cp}$, $\Delta r \ll \lambda$ – математическая запись условно-сосредоточенного (элементарного) источника, т.е. источника, линейные размеры области, в которой он находится, значительно меньше λ и значительно меньше расстояния до точки наблюдения Р.

При этом $r = r_{cp} = \text{const}$, $\frac{\Delta r}{\lambda} \ll 1 \approx 0$ и формула (2.17) будет выглядеть

$$\bar{F}(p) \approx \frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r_{cp}}}{4\pi r_{cp}} \int_V \bar{\chi} dV. \quad (2.19)$$

3. $\omega = 0$ – условие стационарности поля: $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = \frac{2\pi}{\lambda} = 0$; и соответствующее решение

$$\bar{F}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\chi}}{\Delta r + r_{cp}} dV.$$

4. $\Delta r \ll r_{cp} \ll \lambda$ – точка Р расположена близко к источнику $\bar{\chi}$, т.е. находится в ближней зоне:

$$kr = \frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1 \approx 0, \quad \frac{\Delta r + r_{cp}}{\lambda} \ll 1 \approx 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta r + r_{cp}) \approx 0;$$

$$\bar{F}(p) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\chi}}{\Delta r + r_{cp}} dV. \quad (2.20)$$

Из выражения (2.20) следует, область переменного ЭМП в ближней зоне – область квазистационарного поля.

Как всякое дифференциальное уравнение, уравнения Максвелла допускают множество решений. Для того чтобы решение было однозначным, электромагнитное поле должно удовлетворять дополнительным условиям, которые определяются теоремой единственности.

В случае гармонического электромагнитного поля теорема единственности для внутренней задачи электродинамики утверждает, что решение уравнений Максвелла будет единственным, если в каждой точке поверхности S , ограничивающей объем V , заданы *граничные условия*: известны тангенциальные составляющие вектора \vec{E} (вектора \vec{H}), или на части поверхности S известно значение тангенциальной составляющей вектора \vec{E} , а на остальной ее части – тангенциальной составляющей вектора \vec{H} .

Для внешней задачи электродинамики доказывается теорема единственности, согласно которой решение уравнения Максвелла будет единственным при выполнении граничных условий, сформулированных для внутренней задачи электродинамики, а также при существовании в среде без потерь на удале-

нии от источника поля $r \rightarrow \infty$ *сферической волны* (условие излучения), или *убывание поля в среде с потерями быстрее, чем $1/r$* при $r \rightarrow \infty$ (условие конечности).

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите методы решения уравнений Максвелла. Чем вызвана необходимость применения различных методов?
2. От чего зависит выбор того или иного метода?
3. В чем суть метода волновых уравнений?
4. Решение волновых уравнений для частных случаев.
5. Что является недостатком метода волновых уравнений?
6. Метод скалярного и векторного потенциалов.
7. Метод векторов Герца.
8. Условие Лоренца.
9. Условно-сосредоточенный (элементарный) источник.
10. Условие стационарности поля.
11. Частные решения для уравнений Максвелла.
12. Теорема единственности решений уравнений Максвелла.
13. Теорема единственности для внутренней задачи электродинамики.
14. Теорема единственности для внешней задачи электродинамики.

2.2 Плоские ЭМВ в идеальном диэлектрике

Идеально плоская волна физически существовать не может. Для ее возбуждения понадобился источник ЭМВ бесконечных размеров. Однако чисто практические соображения позволяют использовать ее в качестве модели реальной ЭМВ: практически плоской является сферическая волна достаточно удаленного источника; можно считать, что плоскую волну формируют антенны РЛС. Анализ плоских волн производить значительно проще, чем реальных сферических волн. Ошибкой возникающей при таком допущении, можно пренебречь.

ЭМВ, фронт которой представляет собой плоскость и принадлежащие ей векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению ее распространения, называется плоской.

2.2.1 Электромагнитные волны в свободном пространстве

В объеме V (рисунок 2.2) имеются сторонние источники \vec{J}_{cm} , ρ . Область W находится на достаточно большом удалении от V , т.е. угол $\sin \alpha \approx \alpha \ll 1$. Считаем, что \vec{E} и \vec{H} в области W не зависят от x , y , т.е.

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ и являются функцией только z .

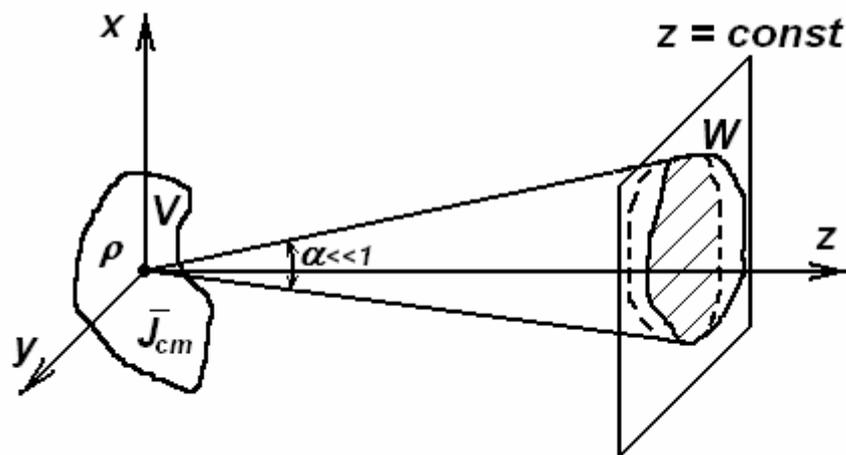


Рисунок 2.2 – Возбуждение ЭМВ в объеме W

Среда – бесконечный, однородный, изотропный, линейный и с постоянными параметрами идеальный диэлектрик ($\tau = 0$). Определить поле в области W . Рассмотрим сначала простейший случай, когда ЭМВ распространяется вдаль от источников в свободном пространстве (в вакууме, $\epsilon_a = \epsilon_0$; $\mu_a = \mu_0$).

В виду того, что в области W нет сторонних источников $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ определим из однородных волновых уравнений (уравнений Лапласа) для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k_0^2 \dot{\vec{E}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\vec{H}} + k_0^2 \dot{\vec{H}} &= 0.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Из условий задачи следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial Z^2} + k_0^2 \dot{\vec{E}} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}}{\partial Z^2} + k_0^2 \dot{\vec{H}} &= 0,\end{aligned}\quad (2.22)$$

решениями которых в общем виде являются

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= \bar{l}^0 (\dot{A}_1 e^{-jk_0 z} + \dot{A}_2 e^{jk_0 z}); \\ \dot{\vec{H}} &= \bar{h}^0 (\dot{B}_1 e^{-jk_0 z} + \dot{B}_2 e^{jk_0 z}),\end{aligned}\quad (2.23)$$

где \bar{l}^0 , \bar{h}^0 - фиксированные в пространстве (т.е. независимые от координат и времени), указывающие направления векторов \vec{E} и \vec{H} соответственно;

$\dot{A}_1 = A_{10} e^{j\varphi_1}$; $\dot{A}_2 = A_{20} e^{j\varphi_2}$; $\dot{B}_1 = B_{10} e^{j\psi_1}$; $\dot{B}_2 = B_{20} e^{j\psi_2}$ - комплексные амплитуды гармонических векторов поля.

Умножив выражения (2.23) на $e^{j\omega t}$ и выделив вещественную часть, мгновенные значения векторов поля \vec{E} и \vec{H} запишем как

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \bar{l}^0 [A_{10} \cos(\omega t - k_0 z + \varphi_1) + A_{20} \cos(\omega t + k_0 z + \varphi_2)]; \\ \vec{H} &= \bar{h}^0 [B_{10} \cos(\omega t - k_0 z + \psi_1) + B_{20} \cos(\omega t + k_0 z + \psi_2)].\end{aligned}\quad (2.24)$$

В формулах (2.21) – (2.24) $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - волновое число в вакууме (постоянная распространения свободного пространства). Для вакуума $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \approx 8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

2.2.2 Плоские гармонические волны в изотропном идеальном диэлектрике

В изотропном (с одинаковыми свойствами во всех направлениях) идеальном ($\sigma = 0$) диэлектрике вид уравнений (2.21) не меняется, только k_0 необходимо заменить на волновое число среды $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, где ϵ_a - абсолютная диэлектрическая, μ_a - абсолютная магнитная проницаемости среды, т.е.

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0;$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{H}} + k^2 \dot{\bar{H}} = 0,$$

решением которых при заданных условиях будут выражения

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{I}^0 [E_{10} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + E_{20} \cos(\omega t + kz + \varphi_2)] ; \\ \bar{H} &= \bar{h}^0 [H_{10} \cos(\omega t - kz + \psi_1) + H_{20} \cos(\omega t + kz + \psi_2)] . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Проанализируем формулу (2.25) с точки зрения волнового процесса.

Волна – физический процесс, в котором физическая величина сохраняет с течением времени одно и то же значение в точках, движущихся в определенном направлении с определенной скоростью. Исходя из определения волны приравняем величины векторов в первом и втором слагаемых выражения (2.24) к const, например для \bar{E} (аналогично и для \bar{H}):

$$\begin{aligned} A_{10}(\cos(\omega t - kz + \varphi_1) = \text{const}; \quad \omega t - kz + \varphi_1 = \text{const}; \quad z = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi_1 - \text{const}); \\ A_{20}(\cos(\omega t + kz + \varphi_2) = \text{const}; \quad \omega t + kz + \varphi_2 = \text{const}; \quad z = -\frac{1}{k}(\omega t + \varphi_2 - \text{const}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Основные следствия из соотношений (2.26):

1. Приравняв в формуле (2.26) $t = \text{const}$, найдем, что $Z = \pm \frac{1}{k}(\varphi_{1,2} - \text{const}) = \text{const}$, т.е. в системе координат x, y, z ; $z = \text{const}$ описывает плоскость перпендикулярную к оси z . Эта плоскость является поверхностью равных фаз и называется фазовым фронтом волны. Таким образом, соотношения (2.25) описывают плоскую волну.

2. Первое соотношение (2.26) описывают ЭМВ, распространяющуюся в положительном направлении оси z (так называемую прямую ЭМВ), так как с течением времени координата z точки, в которой вектор \bar{E} (либо \bar{H}) постоянен, увеличивается.

3. Второе соотношение (2.26) описывает ЭМВ, распространяющуюся в направлении противоположном оси z , (так называемую обратную ЭМВ), т.к. с течением времени координата z точки, в которой вектор \bar{E} (либо \bar{H}) постоянен, уменьшается (увеличивается в сторону отрицательных значений). Поскольку источников справа от области W нет, а также считаем, что нет условий для возникновения отражений ЭМВ в рассматриваемой среде, то в дальнейшем будем рассматривать только прямую ЭМВ. Будем полагать, что в выражении (2.25) $E_{10} = E_0, H_{10} = H_0$, а $E_{20} = 0, H_{20} = 0$, тогда окончательно

$$\bar{E} = \bar{I}^0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi); \quad \bar{H} = \bar{h}^0 H_0 \cos(\omega t - kz + \psi). \quad (2.27)$$

2.2.2.1 Фазовая скорость

Скорость, с которой перемещается в пространстве фазовый фронт волны (поверхность равных фаз) называется фазовой скоростью V_ϕ .

По определению V_ϕ из первого соотношения (2.26) следует, что

$$V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k} (\omega t + \phi - \text{const}) \right] = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (2.28)$$

где ϵ, μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости и среды.

Из формулы (2.28) следует: фазовая скорость V_ϕ плоской ЭМВ зависит только от параметров среды. В вакууме $\epsilon = 1, \mu = 1$, следовательно, $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. В идеальном диэлектрике с $\epsilon \mu > 1, V_\phi < c$.

2.2.2.2 Длина волны

Длина волны ЭМВ в данной среде – это кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве, в которых фаза векторов поля одинакова, т.е. отличается на 2π .

Согласно определению

$$(\omega t - kz_1 + \phi) - (\omega t - kz_2 + \phi) = k(z_2 - z_1) = k\lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.29)$$

Из выражения (2.29) следует смысл коэффициента "к": коэффициент "к" показывает какое число длин волн λ укладывается на отрезке длиной 2π . Для идеального диэлектрика (т.е. при $\sigma = 0$) к является коэффициентом распространения ЭМВ.

Соотношение (2.29) можно записать в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{2\pi V_\phi}{2\pi f} = \frac{V_\phi}{f} = V_\phi T. \quad (2.30)$$

Из формулы (2.30) следует, что длина волны λ – расстояние на которое перемещается фазовый фронт волны за период колебаний.

Из соотношений (2.29) и (2.30) следует:

1. Длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_{св} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \cdot T.$$

2. Длина волны ЭМП в среде с $\epsilon > 1, \mu > 1$

$$\lambda = V_{\phi} \cdot T = \frac{C}{\sqrt{\epsilon\mu}} T \langle \lambda_{\text{св}},$$

т.е. λ в идеальном диэлектрике зависит только от параметров ϵ_a , μ_a и меньше $\lambda_{\text{св}}$ в свободном пространстве (вакууме).

2.2.2.3 Направление векторов поля

Для определения ориентации векторов в пространстве воспользуемся первым и вторым уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд, которые для идеального случая диэлектрика, имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\bar{H}} &= j\omega \epsilon_a \dot{\bar{E}}; \\ \text{rot} \dot{\bar{E}} &= -j\omega \mu_a \dot{\bar{H}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

В соотношениях (2.31) комплексные векторы \bar{E} и \bar{H} согласно формул (2.26) определяются как

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}} &= \bar{\ell}^0 E_0 e^{-jkz} e^{j\varphi} = \bar{\ell}^0 \dot{E}_0 e^{-jkz}; \\ \dot{\bar{H}} &= \bar{h}_0 H_0 e^{-jkz} e^{j\psi} = \bar{h}^0 \dot{H}_0 e^{-jkz}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Определим значение $\text{rot} \dot{\bar{H}}$.

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\bar{H}} &= \text{rot}(\bar{h}_0 \dot{H}_0 e^{-jkz}) = [\text{grad}(\dot{H}_0 e^{-jkz}), \bar{h}_0] + \dot{H}_0 e^{-jkz} [\text{rot} \bar{h}] = \\ &= \frac{d}{dz} \dot{H}_0 e^{-jkz} [\bar{z}^0, \bar{h}_0] = -jk \dot{H}_0 e^{-jkz} [\bar{z}^0, \bar{h}^0] = -jk [\bar{z}^0, \dot{\bar{H}}]. \end{aligned}$$

Из первого равенства системы (2.31) найдем, что $-jk [\bar{z}^0, \dot{\bar{H}}] = j\omega \epsilon_a \dot{\bar{E}}$ и

$$\dot{\bar{E}} = -\frac{k}{\omega \epsilon_a} [\bar{z}^0, \dot{\bar{H}}] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} [\dot{\bar{H}}, \bar{z}^0]. \quad (2.33)$$

Вычислив $\text{rot} \dot{\bar{E}}$, найдем, что

$$\dot{\bar{H}} = -1/\sqrt{\mu_a/\epsilon_a} [\dot{\bar{E}}, \bar{z}^0]. \quad (2.34)$$

Вывод из формул (2.33) и (2.34):

поскольку $\sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$ - величина скалярная, то вектор \bar{E} связан с векторами \bar{H} и \bar{z}_0 правой тройкой векторов (рисунок 2.3). Аналогично, вектор $(-\bar{H})$ связан с векторами \bar{E} и \bar{z}^0 также правой тройкой векторов, т.е. векторы \bar{E} и \bar{H} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны оси Oz (направлению распро-

странения ЭМВ. Выражения (2.33) и (2.34) получены из уравнений Максвелла, которые справедливы для любых электромагнитных волн, следовательно, сказанное выше можно распространить на более общие случаи распространения ЭМВ и утверждать, что в любой точке пространства в фиксированный момент времени векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{S} (направление распространения) связаны правой тройкой векторов.

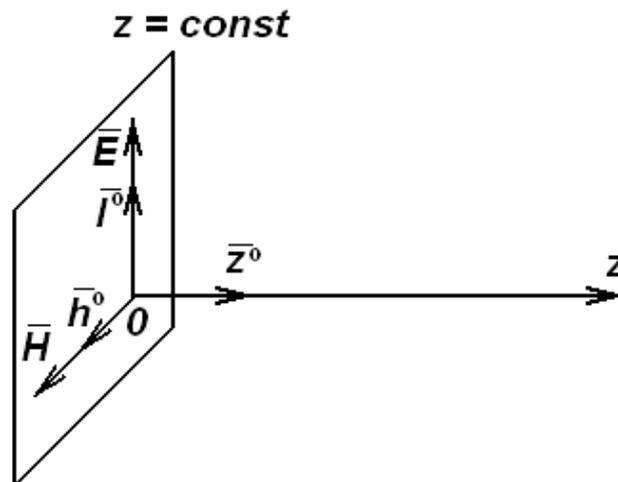


Рисунок 2.3 – Взаимная ориентация векторов поля плоской ЭМВ

Волна, в которой векторы \vec{E} и \vec{H} в любой момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения, называется поперечной ЭМВ и обозначается символом ТЕМ – волна (Т – волна).

2.2.2.4 Фазовые соотношения между векторами поля. Характеристическое сопротивление среды

Рассмотрим фазовые соотношения между векторами ЭМП в идеальном диэлектрике.

Для определения фазовых соотношений между \vec{E} и \vec{H} воспользуемся формулой (2.33), которую запишем в виде

$$\dot{E}\bar{\ell}_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} [\dot{H}\bar{h}^0, \bar{Z}^0] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H} [\bar{h}^0, \bar{Z}^0] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H}\bar{\ell}_0 . \quad (2.35)$$

Из выражения (2.35) следует, что

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H} \quad \text{и} \quad \dot{E}/\dot{H} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} . \quad (2.36)$$

В то же время из формулы (2.27) следует, что

$$\frac{\dot{\vec{E}}}{\dot{\vec{H}}} = \frac{E_0}{H_0} e^{j(\varphi-\psi)} . \quad (2.37)$$

Из формул (2.36) , (2.37) следует, что

$$\varphi - \psi = 0 ; \quad e^{j(\varphi-\psi)} = 1 ; \quad \frac{E_0}{H_0} e^{j(\varphi-\psi)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} ; \quad \frac{\dot{\vec{E}}}{\dot{\vec{H}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} . \quad (2.38)$$

Из формулы (2.38) следует:

1. Векторы \vec{E} и \vec{H} плоской волны, распространяющейся в идеальном диэлектрике синфазны (рисунок 2.4).

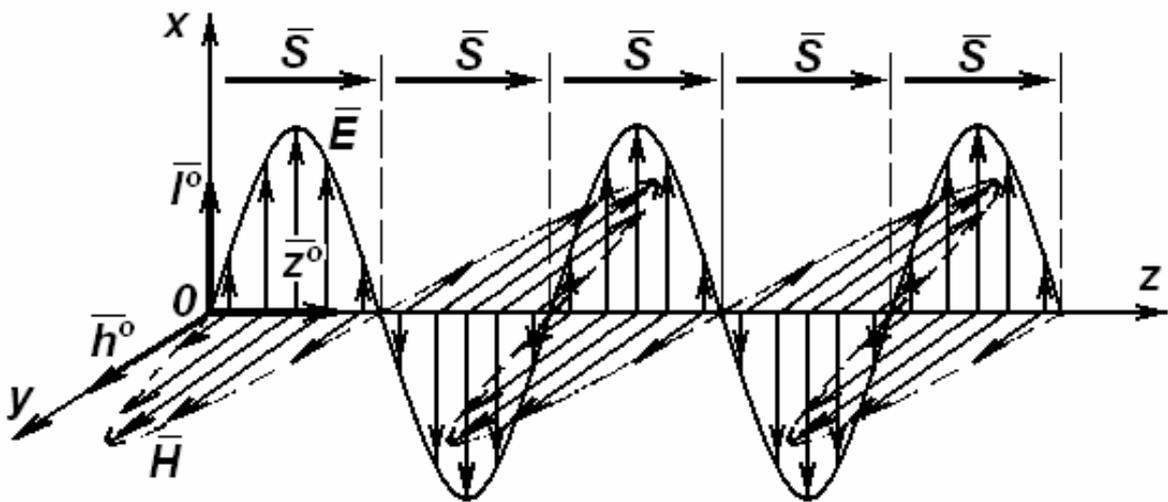


Рисунок 2.4 – Векторы E и H в идеальном диэлектрике

2. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ в течение всего периода колебаний направлен вдоль оси z (рисунок 2.4).

3. Поскольку для идеального диэлектрика $\varphi - \psi = 0$, то $\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \rho_c$ – характеристическое сопротивление среды – вещественное число. Для свободного пространства

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом} = 120\pi \text{ Ом};$$

для любой среды

$$\rho_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ Ом} \quad (2.39)$$

Характеристическое сопротивление среды ρ_c представляет собой расчетный параметр и определяет связь между комплексными амплитудами \dot{E} и \dot{H} ЭМП, распространяющегося в идеальном диэлектрике, который зависит только от параметров среды ϵ_a, μ_a .

Следует заметить, что характеристическое сопротивление среды не связано с потерями энергии. Это не сопротивление в привычном понимании слова, а названо так только по аналогии, так как отношение комплексных амплитуд

\dot{E} и \dot{H} имеет размерность $\left[\frac{B/M}{A/M} = \frac{B}{A} = \text{Ом} \right]$.

Большую аналогию характеристическое сопротивление среды имеет с реактивным сопротивлением в цепях с сосредоточенными параметрами, содержащих (реактивные элементы) индуктивности и емкости.

Характеристическое сопротивление среды нельзя непосредственно измерить, а можно только вычислить, если известны амплитуды электрического и магнитного поля, либо по электродинамическим параметрам ϵ_a, μ_a .

Определим фазовую скорость волны

$$V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k} (\omega t + \psi - \text{const}) \right] = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} < c, \quad (2.40)$$

т.к. относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости в средах без потерь всегда больше единицы, то фазовая скорость ЭМВ в идеальном диэлектрике определяется только параметрами среды и всегда меньше скорости света.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие практические соображения позволяют использовать плоскую электромагнитную волну в качестве модели реальной ЭМВ?
2. Математические выражения для векторов электромагнитной волны в свободном пространстве.
3. Математические выражения для векторов плоской гармонической волны в изотропном идеальном диэлектрике.
4. Определение волны как физического процесса.
5. Фазовая скорость.
6. Длина волны ЭМП в среде.
7. Длина волны в свободном пространстве.
8. Направление векторов поля.
9. Фазовые соотношения между векторами ЭМП в идеальном диэлектрике.
10. Направление вектора Пойнтинга в идеальном диэлектрике.
11. Характеристическое сопротивление среды.
12. Фазовая скорость ЭМВ в среде без потерь.

2.3 Плоские ЭМВ в однородной изотропной проводящей среде

2.3.1 Плоские гармонические волны в однородной проводящей среде

В проводящей среде ($\sigma_d \neq 0$)

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{\left(\epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}\right) \mu_a} = \beta - j\alpha; \quad (2.41)$$

где \dot{k} – комплексное волновое число (комплексный коэффициент распространения ЭМВ в среде с потерями).

В соотношении (2.41) $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}\right)$ – отношение

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} = \operatorname{tg} \delta, \quad (2.42)$$

где δ – угол тепловых потерь.

Решением волновых уравнений при таких условиях будут

$$\dot{\vec{E}} = \bar{\ell}^0 \vec{E}_0 e^{-jkz} e^{j\varphi}, \quad \dot{\vec{H}} = \bar{h}^0 \vec{H}_0 e^{-jkz} e^{j\psi}. \quad (2.43)$$

Из формального сходства формул (2.43) и (2.32) следует вывод: соотношения (2.43) также описывают прямую плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z , векторы \vec{E} и \vec{H} которой взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной оси z , т.е. векторы \vec{E} , \vec{H} , \vec{z}^0 образуют правую тройку векторов.

С учетом формулы (2.41), (2.43) запишутся как

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \bar{\ell}^0 \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\varphi}; \\ \dot{\vec{H}} &= \bar{h}^0 \vec{H}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\psi}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

а мгновенные значения \vec{E} и \vec{H} , как

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \bar{\ell}^0 \vec{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi); \\ \vec{H} &= \bar{h}^0 \vec{H}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из формул (2.44), (2.45) следует:

1. коэффициент α характеризует *степень затухания амплитуд* \vec{E} и \vec{H} при распространении ЭМВ вдоль оси z , т.е. α – коэффициент затухания;

2. коэффициент β характеризует *степень изменения фазы* \vec{E} и \vec{H} при распространении ЭМВ вдоль оси z , т.е. β – *фазовая постоянная* (имеет тот же

физический смысл, что и k в среде без потерь). Найдем зависимость коэффициентов α и β от электромагнитных параметров среды $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$. Для этого формулу (2.41) возведем в квадрат.

В результате найдем, что

$$\begin{aligned}\omega^2 \epsilon_a \mu_a &= \beta^2 - \alpha^2 ; \\ \omega \sigma \mu_a &= 2\alpha\beta .\end{aligned}\quad (2.46)$$

Решением системы уравнений (2.46) относительно α и β являются

$$\beta = \omega \left[\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} \right) \right]^{1/2} ; \quad (2.47)$$

$$\alpha = \omega \left[\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} \right) \right]^{1/2} . \quad (2.48)$$

Если в выражениях (2.47) и (2.48) $\sigma = 0$, то $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k$; $\alpha = 0$.

2.3.1.1 Дисперсия электромагнитных волн

В соответствии с формулой (2.45) уравнение поверхности равных фаз будет иметь вид

$$z = \frac{1}{\beta} (\omega t + \varphi - \text{const}). \quad (2.49)$$

По определению фазовой скорости в соответствии с формулой (2.49)

$$V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\left[\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} \right) \right]^{1/2}} < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (2.50)$$

Из формулы (2.50) следует, что в отличие от идеального диэлектрика V_ϕ ЭМВ в среде с потерями зависит не только от ϵ_a, μ_a , но и от σ и ω .

Явление зависимости V_ϕ от ω называется *дисперсией* ЭМВ, а среда, в которой наблюдается дисперсия, называется диспергирующей (дисперсионной).

До сих пор рассматривались гармонические волны, для которых понятие фазовой скорости имеет строгий физический смысл. Однако гармоническая волна не несет информации за исключением информации о собственных параметрах, т.е. не является переносчиком сигнала. Любой радиосигнал характери-

зается непрерывным либо дискретным спектром частот. При этом обычно ширина спектра сигнала $\Delta\omega$ ограничена частотами $\Delta\omega = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ и $\Delta\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$, причем $\Delta\omega \ll \omega$, где ω_0 – средняя частота спектра или несущая частота сигнала.

В диспергирующей среде (линии передачи СВЧ, среда с потерями, ионосфера, ферриты и др.) фазовая скорость зависит от частоты и происходит искажение формы и фазовой структуры периодических сигналов, т.к. каждая из гармонических составляющих этих сигналов, имеющая отличную от ω_0 частоту, будет иметь другие α , β , V_{ϕ} , что приводит к искажению передаваемой информации.

2.3.1.2 Групповая скорость

Поскольку в диспергирующей среде понятие "фазовой скорости для группы волн с различными частотами" теряет однозначный смысл, скорость распространения в таких средах оценивается с помощью *групповой скорости* $V_{гр}$, под которой понимают скорость переноса энергии группой монохроматических волн, занимающих узкий спектр частот, в котором сосредоточена основная часть энергии сигнала, т.е. $V_{гр}$ – это скорость перемещения максимума огибающей сигнала.

Найдем групповую скорость и установим ее связь с фазовой скоростью. Для этого рассмотрим случай, когда группа состоит всего из двух волн одинаковой амплитуды с близкими частотами ω_1 и ω_2 , распространяющимися с фазовыми скоростями $V_{\phi 1}$ и $V_{\phi 2}$ в направлении возрастания координаты z (рисунок 2.5).

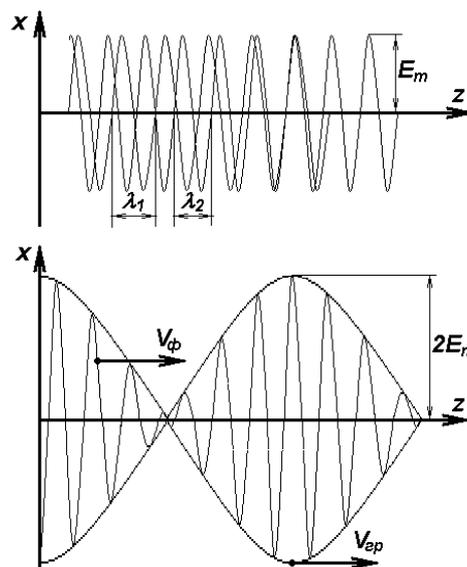


Рисунок 2.5 – К определению фазовой и групповой скоростей

Сигнал

$$\bar{E}(t, z) = \bar{x}^0 E_m \cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \bar{x}^0 E_m \cos(\omega_2 t - \beta_2 z),$$

где $\beta_1 = \frac{\omega_1}{V_{\phi 1}}$ и $\beta_2 = \frac{\omega_2}{V_{\phi 2}}$, можно представить в виде

$$\bar{E}(t, z) = \bar{x}^0 2E_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z\right).$$

Из этого соотношения видно, что огибающая сигнала $2E_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} z\right)$ перемещается со скоростью, определяемой из условия (2.50)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} = V_{гр}.$$

Найденная скорость перемещения максимума огибающей и получила название групповой.

Быстро изменяющиеся мгновенные значения, определяемые множителем $\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z\right)$, перемещаются вдоль оси z со скоростью

$$V_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2}.$$

Учитывая близость частот ω_1 и ω_2 , имеем

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2,$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \approx \beta_1 \approx \beta_2,$$

$$V_{\phi} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2} \approx V_{\phi 1} \approx V_{\phi 2}.$$

И, наконец, получим формулу, устанавливающую связь между $V_{гр}$ и V_{ϕ}

$$V_{гр} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} \approx \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{V_{\phi}}\right)} = V_{\phi} \left(1 - \frac{\omega}{V_{\phi}} \frac{dV_{\phi}}{d\omega}\right).$$

Откуда, учитывая, что $\frac{\omega}{V_{\phi}} = \beta$ найдем

$$V_{гр} = V_{\phi} / 1 - \beta \frac{dV_{\phi}}{d\omega}.$$

В зависимости от знака $dV_\phi/d\omega$ среды классифицируются:
 недиспергирующие, если $dV_\phi/d\omega = 0$; $V_{гр} = V_\phi$;
 с нормальной дисперсией, если $dV_\phi/d\omega < 0$; $V_{гр} < V_\phi$;
 с аномальной дисперсией, если $dV_\phi/d\omega > 0$; $V_{гр} > V_\phi$.

2.3.1.3 Характеристическое сопротивление. Вектор Пойнтинга

Формулу для характеристического сопротивления проводящей среды определяем, воспользовавшись известным отношением для $\dot{\rho}_c$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_c &= \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_a}\right)}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\delta}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\cos\delta(\cos\delta + j\sin\delta)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\cos\delta} e^{j\frac{\delta}{2}} = |\dot{\rho}_c| e^{j\frac{\delta}{2}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $|\dot{\rho}_c| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\cos\delta}$.

С другой стороны, согласно формуле (2.37)

$$\dot{\rho}_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \frac{E_0}{H_0} e^{j(\varphi-\psi)}. \quad (2.52)$$

Из выражений (2.51), (2.52) найдем, что:

$$\frac{E_0}{H_0} e^{j(\varphi-\psi)} = |\dot{\rho}_c| e^{j\frac{\delta}{2}},$$

откуда следует

$$\frac{E_0}{H_0} = |\dot{\rho}_c|, \quad \varphi - \psi = \frac{\delta}{2}. \quad (2.53)$$

Из формул (2.51)–(2.53) следует выводы.

1. Для проводящей среды $\dot{\rho}_c$ носит *комплексный* характер и является функцией параметров среды $\mu_a, \epsilon_a, \sigma$ и частоты ω .

2. Модуль $|\dot{\rho}_c|$ *меньше* ρ_c идеального диэлектрика, так как $\sqrt{\cos\delta} < 1$.

3. В отличие от идеального диэлектрика в проводящей среде \bar{E} и \bar{H} несинфазны (вектор \bar{E} опережает вектор \bar{H} на угол $\frac{\delta}{2}$, т.е. фаза вектора \bar{E} больше фазы вектора \bar{H}) как показано на рисунке 2.6.

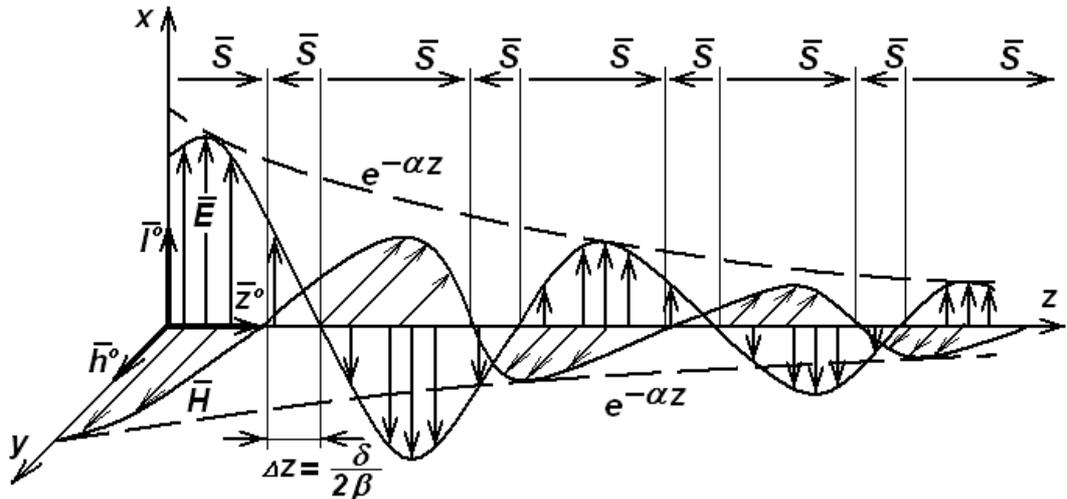


Рисунок 2.6 – Вектор Пойнтинга в среде с потерями

С учетом формулы (2.53) и, приняв $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{\ell}^0 E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z); \\ \bar{H} &= \bar{h}^0 H_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right).\end{aligned}\quad (2.54)$$

В соответствии с формулой (2.54) вектор Пойнтинга

$$\begin{aligned}|\dot{S}|_{\text{cp}} &= \left| \left[\dot{\bar{E}}, \dot{\bar{H}}^* \right] \right| = \bar{\ell}^0 \bar{E} \times \bar{h}^0 \bar{H} = \\ &= \bar{z}^0 (E_0 H_0) e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right) = \\ &= \bar{z}^0 \frac{E_0^2}{2|\dot{\rho}_c|} e^{2\alpha z} \left\{ \cos\left[2(\omega t - \beta z) - \frac{\delta}{2}\right] + \cos\frac{\delta}{2} \right\}.\end{aligned}\quad (2.55)$$

Из формулы (2.55) следуют такие важные моменты.

1. Вектор \bar{S} пропорционален квадрату амплитуды вектора E_0 (H_0).
2. Вектор \bar{S} пульсирует с удвоенной частотой.
3. Амплитуда вектора \bar{S} вдоль оси z убывает по экспоненте $e^{-2\alpha z}$.
4. Поскольку \bar{E} и \bar{H} несинфазны, то вектор \bar{S} направлен против оси z , когда знаки множителей в выражении (2.55) не совпадают, и направлен

вдоль оси z , если знаки множителей совпадают (рисунок 2.6). Вспомним для сравнения, что в идеальном диэлектрике \vec{E} и \vec{H} синфазны, поэтому вектор \vec{S} в течение всего времени направлен вдоль оси Oz .

2.3.2 Классификация сред по проводимости

Известно, что в идеальном диэлектрике $\sigma = 0$ и $\operatorname{tg} \delta = 0$; в идеальном проводнике $\sigma = \infty$, $\operatorname{tg} \delta = \infty$. Поскольку в природе нет идеальных проводников и диэлектриков, на практике пользуются следующей классификацией сред по проводимости:

среда диэлектрик, если $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \ll 1 \right)$;

среда полупроводник, если $0,1 \ll \operatorname{tg} \delta \ll 10$;

среда проводник, если $\operatorname{tg} \delta \gg 10$ $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \gg 1 \right)$.

Из соотношения $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$ следует, что одна и та же среда для различных частот может быть или диэлектриком, или полупроводником, или проводником.

Рассмотрим два частных предельных случая.

Первый случай – среда является *диэлектриком* $\left(\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \ll 1 \right)$. Такое неравенство возможно или при малой σ , или при большой ω и не слишком большой σ , т.е. среда является реальным диэлектриком. Для анализа характеристик реального диэлектрика воспользуемся известными уже ранее соотношениями.

Для реального диэлектрика $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \ll 1 \right)$, поэтому из выражения (2.47) следует, что

$$\beta \approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k ; \quad (2.56)$$

из формулы (2.48) следует, что при $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \ll 1$;

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2 ; \quad \alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} ; \quad (2.57)$$

из равенства (2.50) следует, что

$$V_\phi \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} ; \quad (2.58)$$

из формулы (2.51) следует, что

$$\rho_c \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \rho_c . \quad (2.59)$$

Из формул (2.56)...(2.59) следует, что распространение плоских ЭМВ в реальном диэлектрике почти не отличается от их распространения в идеальном диэлектрике, за исключением наличия процесса поглощения энергии ЭМВ реальным диэлектриком, обусловленного проводимостью среды σ .

Второй случай – среда является *проводником* $\left(\text{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a} \gg 1 \right)$. Такое неравенство возможно если при низкой ω и не слишком низкой проводимости, или при очень высокой проводимости для всех частот.

Для реальных проводников на высоких частотах $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_a} \gg 1$. Поэтому:
из формул (2.47) и (2.48) следует, что

$$\beta \approx \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}} ; \quad (2.60)$$

из равенства (2.50) следует, что

$$V_\phi = \omega/\beta \approx \sqrt{2\omega/\mu_a\sigma} ; \quad (2.61)$$

из выражения (2.30) следует, что

$$\lambda = T \cdot V_\phi = \frac{\omega T}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f\mu_a\sigma}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu_a\sigma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}}} ;$$

из формулы (2.51) следует, что

$$\dot{\rho}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a\omega}{-j\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu_a\omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} . \quad (2.62)$$

Из формул (2.60)...(2.62) следует, что:

1) среда с $\text{tg}\delta \gg 1$ относится к диспергирующей среде (чем больше σ , тем больше β и меньше V_ϕ);

2) среда с $\text{tg}\delta \gg 1$ относится к среде с потерями (чем больше σ , тем больше α и больше тепловые потери);

3) если среда является идеальным проводником ($\sigma = \infty$), то максимальный сдвиг фаз между векторами \vec{E} и \vec{H} ,

$$\frac{\delta_{\max}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{4} \text{tg}\delta = \text{tg } 90^\circ = \infty; \quad \beta = \alpha = \infty,$$

т.е. в идеальном проводнике ЭМВ не распространяется ввиду бесконечно большого затухания в проводнике ($\alpha = \infty$), которое возникает за счет полного отражения ЭМВ от границы идеального проводника ($\beta = \infty$).

Вопросы для самоконтроля

1. Комплексное волновое число (комплексный коэффициент распространения ЭМВ в среде с потерями).
2. Тангенс угла тепловых потерь.
3. Решение волновых уравнений для проводящей среды.
4. Коэффициент затухания амплитуды.
5. Коэффициент изменения фазы (фазовая постоянная).
6. Зависимость коэффициентов α и β от электромагнитных параметров среды.
7. Дисперсия электромагнитных волн.
8. Классификация сред по диспергирующим свойствам.
9. Фазовая скорость в среде с потерями.
10. Групповая скорость в среде с потерями.
11. Вектор Пойнтинга в среде с потерями.
12. Характеристического сопротивления проводящей среды.
13. Классификация сред по проводимости.
14. Будет ли переноситься энергия ЭМВ, если сдвиг фаз между векторами E и H составляет $\pi/4$, $\pi/2$, π ?

2.4 Поляризация электромагнитного поля

Ранее полагалось, что ориентация векторов поля плоской электромагнитной волны в пространстве неизменна, а сами вектора изменяются по гармоническому закону. Однако это выполняется не всегда. Для полного описания ЭМВ кроме параметров ЭМВ, рассмотренных ранее, необходимо знать как закон изменения величин векторов \vec{E} и \vec{H} во времени, так и закон изменения их ориентации в пространстве, которые определяют вид поляризации ЭМВ.

Явление поляризации ЭМВ широко используется в антенных устройствах, в устройствах защиты от мешающих воздействий (в поляризационных фильтрах), в устройствах СВЧ (поляризационные, фазовые циркуляторы, вентили: резонансные и со смещением поля, модуляторы, фильтры типов волн и т.д.).

Свойства волн различной поляризации используются для создания различных классов антенн, параметры которых определяются видом поляризации.

2.4.1 Основные определения. Вывод уравнения поляризационного эллипса

Плоскостью поляризации называется плоскость, проведенная через вектор \vec{E} и направление распространения плоской волны, определяемое вектором \vec{S} .

ЭМВ называется *линейно-поляризованной*, если ориентация плоскости поляризации не изменяется в процессе распространения ЭМВ.

ЭМВ называется *поляризованной по кругу*, если в процессе распространения ЭМВ амплитуда вектора \vec{E} остается постоянной, а сам вектор \vec{E} вращается с некоторой угловой скоростью в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ЭМВ.

ЭМВ называется *эллиптически поляризованной*, если в процессе распространения амплитуда \vec{E} изменяется в некоторых пределах (от E_{\min} до E_{\max}), а сам вектор \vec{E} вращается с некоторой угловой скоростью в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ЭМВ.

Из курса высшей математики известно, что в общем случае волновое уравнение имеет множество решений. В соответствии с этим ЭМВ (типа ТЕМ), которая описывается соотношениями (2.2.6), (2.3.5) можно представить в виде суммы частных полей (волн) типа ТЕМ, каждое из которых:

1) имеет одинаковую с суммарной ЭМВ частоту ω , но различную амплитуду, т.е.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_2 = \dots = \omega_n = \omega_0; \\ E_1 &\neq E_2 \neq \dots \neq E_n \neq E_0; \\ H_1 &\neq H_2 \neq \dots \neq H_n \neq H_0.\end{aligned}$$

2) содержит взаимно перпендикулярные и перпендикулярные направлению распространения ЭМВ (пусть это будет ось z) векторы \bar{E}_n и \bar{H}_n , т.е. \bar{E}_n и \bar{H}_n имеют проекции только на оси x и y – E_{xn}, E_{yn} и H_{xn}, H_{yn}), при этом ориентация каждой пары векторов \bar{E}_n и \bar{H}_n в плоскости, перпендикулярной распространению ЭМВ, произвольная.

В соответствии с этим комплексный вектор $\dot{\bar{E}}$ (аналогично и $\dot{\bar{H}}$) суммарного поля можно представить как

$$\dot{\bar{E}} = \dot{E}_x \bar{x}^0 + E_y \bar{y}^0 = \sum_n \dot{\bar{E}}_{xn} + \sum_n \dot{\bar{E}}_{yn}. \quad (2.63)$$

Рассмотрим законы изменения амплитуд \bar{E} и \bar{H} их законы изменения ориентации при рассмотрении плоской ЭМВ в идеальном диэлектрике. Для этого перейдем от комплексной формы записи амплитуд векторов $\dot{\bar{E}}$ ($\dot{\bar{H}}$) к их мгновенным значениям.

В соответствии с формулой (2.63) мгновенное значение вектора $\bar{E}(z,t)$ и $\bar{H}(z,t)$ суммарного поля будет определяться соотношением

$$\bar{E}(z,t) = \bar{x}^0 E_{x0} \cos(\omega t - kz + \Psi_x) + \bar{y}^0 E_{y0} \cos(\omega t - kz + \Psi_y). \quad (2.64)$$

Определим вид поляризации суммарного ЭМП, векторы $\bar{E}(z,t)$, $\bar{H}(z,t)$ которого имеют две составляющие, амплитуды которых E_{x0}, E_{y0} и H_{x0}, H_{y0} , а начальные фазы $\Psi_x, \Psi_y, \Phi_x, \Phi_y$ используя для этого соотношение (2.64) только для $\bar{E}(z,t)$.

Представим первое и второе слагаемое формулы (2.64) с учетом выражения (2.63) в виде:

$$\frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\omega t - kz + \Psi_x) = \cos(\omega t - kz) \cos \Psi_x - \sin(\omega t - kz) \sin \Psi_x; \quad (2.65)$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} \cos(\omega t - kz + \Psi_y) = \cos(\omega t - kz) \cos \Psi_y - \sin(\omega t - kz) \sin \Psi_y. \quad (2.66)$$

Умножим выражение (2.65) на $\sin \Psi_y$, а выражение (2.66) на $(-\sin \Psi_x)$ и полученные результаты сложим. В результате получим:

$$\cos(\omega t - kz) = \frac{\frac{E_x}{E_{x0}} \sin \Psi_y - \frac{E_y}{E_{y0}} \sin \Psi_x}{\sin \Psi}, \quad (2.67)$$

где $\Psi = \Psi_y - \Psi_x$.

Аналогично, умножив формулу (2.65) на $\cos \Psi_y$, а формулу (2.66) на $(-\cos \Psi_x)$ и, сложив полученные результаты, найдем

$$\sin(\omega t - kz) = \frac{\frac{E_x}{E_{x0}} \cos \Psi_y - \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \Psi_x}{\sin \Psi}. \quad (2.68)$$

Возведем выражения (2.67) и (2.68) в квадрат и почленно сложим. В результате приходим к уравнению:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}}\right) \cos \Psi = \sin^2 \Psi. \quad (2.69)$$

Соотношение (2.69), представляющее собой уравнение эллипса, характеризует кривую, которую описывает за период следования T конец вектора \vec{E} , вращающийся с угловой частотой ω в плоскости, перпендикулярной направлению распространения ЭМВ (картинной плоскости). Такую же кривую описывает конец вектора $\vec{H}(z,t)$. При этом соответствующие оси этих эллипсов взаимно перпендикулярны. Таким образом *суммарная ЭМВ* в общем случае является *эллиптически поляризованной волной*.

2.4.2 Параметры поляризационного эллипса. Виды поляризационного эллипса

Рассмотрим параметры поляризационного эллипса (рисунок 2.7).

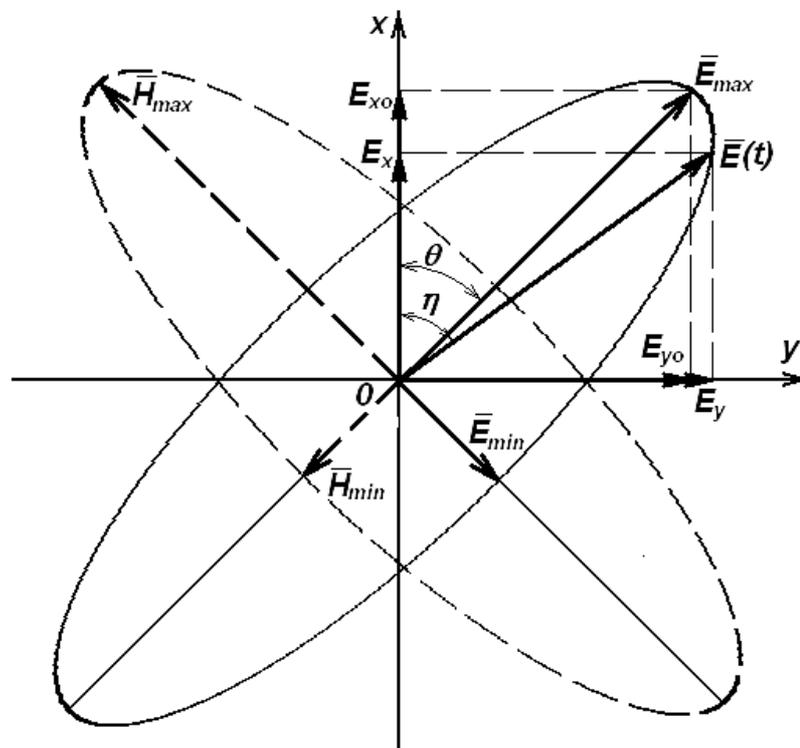


Рисунок 2.7 – Поляризационный эллипс

1. Коэффициент поляризации (p) – отношение малой оси эллипса к большой

$$p = E_{\min} / E_{\max}. \quad (2.70)$$

2. Ориентация эллипса (η) – угол между осью X и большой осью эллипса

$$\operatorname{tg} 2\eta = \frac{2m \cos \Psi}{1 - m^2}, \quad m = E_{y0} / E_{x0}. \quad (2.71)$$

3. Пространственное положение вектора \bar{E} (θ) – угол между осью OX и вектором \bar{E} :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{y0} \cos(\omega t - kz + \Psi_y)}{E_{x0} \cos(\omega t - kz - \Psi_x)}, \quad (2.72)$$

где E_y, E_x – текущие координаты конца вектора E .

4. Длина результирующего вектора $|\bar{E}|$:

$$|\bar{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}. \quad (2.73)$$

В зависимости от соотношения амплитуд E_{x0} и E_{y0} и фазовых сдвигов между Ψ_x и Ψ_y поляризационный эллипс (рисунок 2.7) может иметь различный вид.

Первый случай. Начальные фазы E_x и E_y совпадают, т.е. $\Psi_y = \Psi_x$. Тогда

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \operatorname{const}.$$

При этих условиях эллипс вырождается в прямую линию, т.к. результирующий вектор E , изменяясь во времени по величине, скользит вдоль линии, которая находится в I и III квадрантах и отклонена на постоянный угол θ (рисунок 2.8).

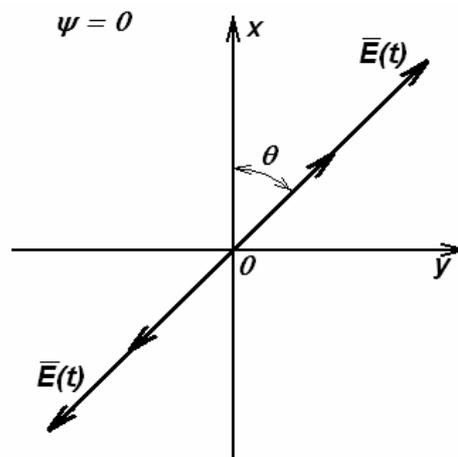


Рисунок 2.8 – Линейная поляризация ЭМВ при $\Psi_y = \Psi_x$

Второй случай. Начальные фазы E_x и E_y отличаются от $\pm\pi$, т.е. $\Psi_y = \Psi_x \pm \pi$. Тогда $\theta = -\arctg \frac{E_y}{E_x} \text{const}$, т.е. и в этом случае эллипс вырождается в прямую линию, которая находится во II и IV квадрантах и отклонена на постоянный угол θ и вдоль которой скользит изменяющийся во времени результирующий вектор \bar{E} (рисунок 2.9).

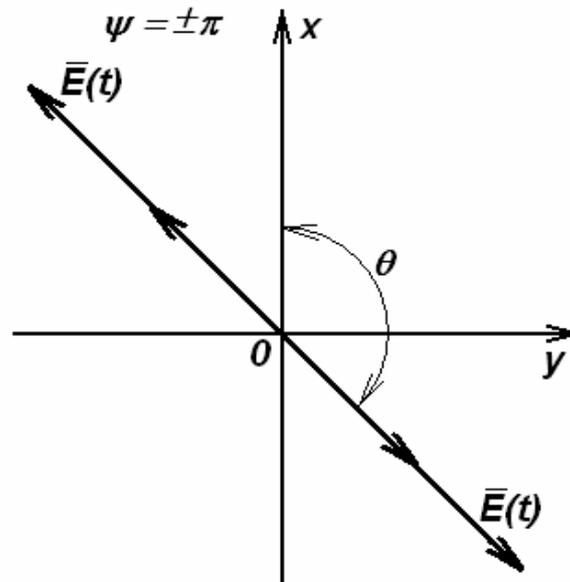


Рисунок 2.9 – Линейная поляризация ЭМВ при $\Psi_y = \Psi_x \pm \pi$

Третий случай. Начальные фазы E_x и E_y отличаются на $\pm \pi/2$, т.е. $\Psi_y = \Psi_x \pm \pi/2$, а $E_{x0} = E_{y0} = E_0$.

В соответствии с формулами (2.70) и (2.73) $p = 1$, следовательно, поляризационный эллипс вырождается в окружность, у которой

$$|\bar{E}| = \sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}.$$

а) E_y отстает от E_x на $\pi/2$, т.е. $\Psi_y - \Psi_x = -\pi/2$. Тогда в соответствии с выражением (2.64)

$$\begin{aligned} \bar{E}_x(z, t) &= \bar{x}^\circ E_0 \cos(\omega t - kz + \Psi_x); \\ \bar{E}_y(z, t) &= \bar{y}^\circ E_0 \cos\left(\omega t - kz + \Psi_x - \frac{\pi}{2}\right) = \bar{y}^\circ E_0 \sin(\omega t - kz + \Psi_x). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Как следует из соотношений (2.74), при небольшом приращении аргумента ωt $E_x(z, t)$ уменьшится, а $E_y(z, t)$ увеличивается, а результирующий вектор $\bar{E}(z, t) = \text{const}$ вращается по часовой стрелке (если смотреть вдоль оси z) с круговой частотой ω (рисунок 2.10). Такая ЭМВ называется правополяризованной по кругу и обозначается $-E^+$, H^+ .

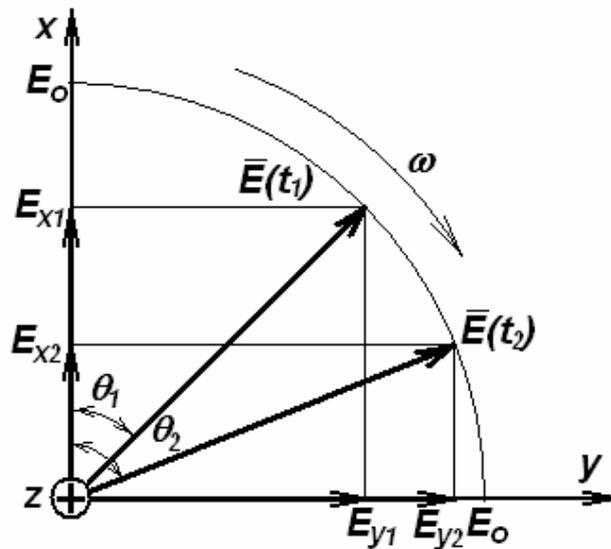


Рисунок 2.10 – Правополяризованная по кругу ЭМВ

б) E_y опережает E_x на $\pi/2$, т.е. $\Psi_y - \Psi_x = \pi/2$. Тогда

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \bar{x}^\circ E_0 \cos(\omega t - kz + \Psi_x); \\ \bar{E}_y(z, t) &= \bar{y}^\circ E_0 \cos\left(\omega t - kz + \Psi_x + \frac{\pi}{2}\right) = -\bar{y}^\circ E_0 \sin(\omega t - kz + \Psi_x). \end{aligned} \quad (2.75)$$

В результате аналогичных рассуждений приходим к выводу, что результирующий вектор $\bar{E}(z, t) = \text{const}$ вращается против часовой стрелки (если смотреть вдоль оси z) с круговой частотой ω . Такая ЭМВ называется левополяризованной по кругу и обозначается $-E^-, H^-$ (рисунок 2.11).



Рисунок 2.11 – Левополяризованная по кругу ЭМВ

Выражения (2.64), (2.74) и (2.75) позволяют представить волну с круговой (эллиптической) поляризацией в виде суммы двух линейнополяризованных волн с одинаковой (разной) амплитудой, повернутых в пространстве на $90^\circ(\pi/2)$ и имеющих фазовый сдвиг также $90^\circ(\pi/2)$. На этом свойстве основан один из используемых в антенной технике способов получения эллиптической поляризации (часто называют вращающейся поляризацией).

Итак, на основании вышесказанного сформулируем правило, согласно которому определяется направление вращения вектора \vec{E} : *при известном соотношении между Ψ_y и Ψ_x вектор \vec{E} всегда вращается от положительной оси, вдоль которой изменяется опережающая по фазе составляющая, к положительной оси, вдоль которой изменяется отстающая по фазе составляющая.*

2.4.3 Выражения для комплексного вектора напряженности поляризованного ЭМП

Согласно выражений (2.74) и (2.75) мгновенные значения правополяризованного по кругу результирующего вектора E^+ и левополяризованного по кругу результирующего вектора E^- и левополяризованного по кругу результирующего вектора E – при условии $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ определяются следующими соотношениями:

$$\vec{E}^+ = E_0 \left[\bar{x}^0 \cos(\omega t - kz + \Psi_x) + \bar{y}^0 \cos\left(\omega t - kz + \Psi_x - \frac{\pi}{2}\right) \right]; \quad (2.76)$$

$$\vec{E}^- = E_0 \left[\bar{x}^0 \cos(\omega t - kz + \Psi_x) + \bar{y}^0 \cos\left(\omega t - kz + \Psi_x + \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2.77)$$

Соотношения (2.76) и (2.77) запишем в комплексной форме, отбросив при этом $e^{j\omega t}$:

$$\dot{\vec{E}}^+ = E_0 e^{-jkz} e^{j\Psi_x} (\bar{x}^0 + \bar{y}^0 e^{-j\frac{\pi}{2}}) = E_0 e^{-jkz} e^{j\Psi_x} (\bar{x}^0 - j\bar{y}^0); \quad (2.78)$$

$$\dot{\vec{E}}^- = E_0 e^{-jkz} e^{j\Psi_x} (\bar{x}^0 + \bar{y}^0 e^{j\frac{\pi}{2}}) = E_0 e^{-jkz} e^{j\Psi_x} (\bar{x}^0 + j\bar{y}^0). \quad (2.79)$$

Просуммируем (2.78) и (2.79). Тогда

$$\dot{\vec{E}}^+ + \dot{\vec{E}}^- = 2E_0 e^{-jkz} e^{j\Psi_x} \cdot \bar{x}^0, \quad (2.80)$$

т.е. при суммировании правополяризованной и левополяризованной по кругу ЭМВ одинаковыми частотами и амплитудами получается линейнополяризованная волна (рисунок 2.12). Аналогичным образом доказывается: при $\omega^+ = \omega^-$ и $E_{x0} \neq E_{y0}$, результирующая волна будет эллиптически поляризованной. *Направление вращения вектора E результирующей эллиптически поляризованной волны совпадает с направлением вращения поляризованной по кругу ЭМВ с большей амплитудой.*

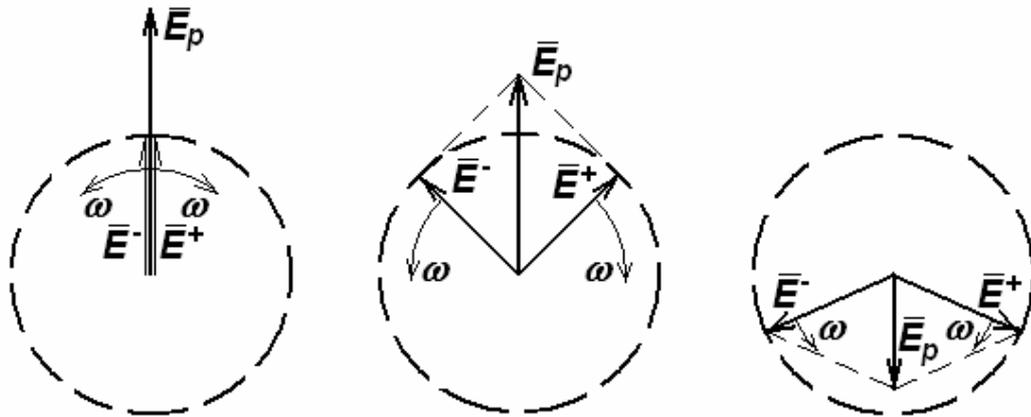


Рисунок 2.12 – Сложение двух волн круговой поляризации противоположного вращения

Таким образом: волны с линейной (эллиптической) поляризацией могут быть представлены в виде суммы двух волн – правополяризованной по кругу и левополяризованной по кругу – соответственно с одинаковыми (разными) амплитудами.

2.4.4 Вектор Пойнтинга эллиптически поляризованной волны

Ранее было доказано, что $\bar{S} = [\bar{E}, \bar{H}]$. Из соотношений (1.59), (2.55) следует, что среднее значение вектора Пойнтинга \bar{S} для плоской волны в идеальном диэлектрике

$$\bar{S}_{cp} = \bar{Z}_0 \frac{E_0^2}{2\rho_c} . \quad (2.81)$$

Тогда в соответствии с выражением (2.64) среднее значение вектора Пойнтинга эллиптически поляризованной волны можно представить как

$$\bar{S}_{cp} = \bar{S}_{срх} + \bar{S}_{сру} = \frac{E_{x0}^2}{2\rho_c} \bar{z}^0 + \frac{E_{y0}^2}{2\rho_c} \bar{z}^0 = \frac{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}{2\rho_c} \bar{z}^0 . \quad (2.82)$$

Если оси X и Y совпадают соответственно с большой и малой осями эллипса поляризации, то

$$\bar{S}_{cp} = \frac{E_{max}^2 + E_{min}^2}{2\rho_c} \bar{z}^0 = \frac{E_{max}^2}{2\rho_c} (1 + p^2) \bar{z}^0 . \quad (2.83)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение плоскости поляризации.
2. Какая ЭМВ называется линейно-поляризованной?
3. Какая ЭМВ называется поляризованной по кругу?
4. Какая ЭМВ называется правополяризованной ?

5. Какая ЭМВ называется левополяризованной ?
6. Какая ЭМВ называется эллиптически поляризованной?
7. Вывести уравнение поляризационного эллипса.
8. Параметры поляризационного эллипса.
9. Виды поляризационного эллипса.
10. Выражения для комплексного вектора напряженности поляризованного ЭМП.
11. Каким образом можно представить линейно поляризованную волну?
12. Каким образом можно представить волну круговой и эллиптической поляризации?
13. Как определяется направление вращения вектора E результирующей эллиптически поляризованной волны?
14. Каким образом вводится вектор Пойнтинга эллиптически поляризованной волны?

2.5 Преломление и отражение плоских волн на плоской границе раздела двух сред

На практике ЭМВ чаще всего распространяются не в безграничных средах, а встречаются на своем пути различные *границы раздела* двух или более сред. Граничные условия (1.38, 1.39, 1.40), (1.45, 1.46, 1.47), (1.48, 1.49) позволяют предположить, что ЭМВ в граничащих средах будут тем более отличаться по своим свойствам, чем сильнее отличаются свойства граничащих сред.

Особенностью рассматриваемых явлений и эффектов, возникающих при падении ЭМВ на границу раздела 2-х сред, является то, что они возникают при взаимодействии двух форм материи – ЭМП и вещества. Из этой особенности вытекает проблема: каким образом решать граничные задачи такого типа в электродинамике. Наиболее просто (однако и весьма приближенно) эта проблема решается с помощью метода *геометрической оптики*.

2.5.1 Основные определения

Суть метода геометрической оптики: если длина волны гораздо меньше линейных размеров плоскости раздела ($\lambda_{\text{ЭМВ}} \ll L$), ЭМВ можно рассматривать в виде луча, перпендикулярного фазовому фронту волны, направление которого совпадает с $V_{\text{ф}}$ и который обозначается вектором \bar{l} . Распространение ЭМВ в среде при этом характеризуется *комплексным волновым вектором* $\bar{k} = k \cdot \bar{l}$, где $k = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}$ - комплексное волновое число. Комплексное значение вектора E (аналогично и вектора H) определяется из решения уравнения Максвелла и имеет вид

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_0 e^{-j|\bar{k}|\bar{l}} e^{j\omega t}. \quad (2.84)$$

Плоскость падения – это плоскость, проходящая через направление падения ЭМВ и нормаль к границе раздела 2-х сред в точке падения ЭМВ (рисунок 2.13).

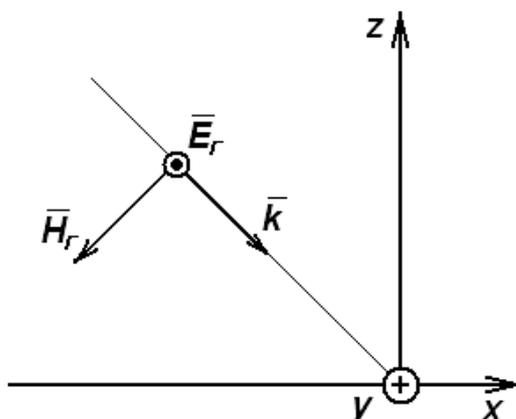


Рисунок 2.13 Плоскость падения и касательно поляризованная волна

Плоская ЭМВ называется, касательно (горизонтально) поляризованной, если вектор \vec{E} находится в плоскости падения (рисунок 2.13). Плоская ЭМВ называется, нормально (вертикально) поляризованной, если вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения (рисунок 2.14).

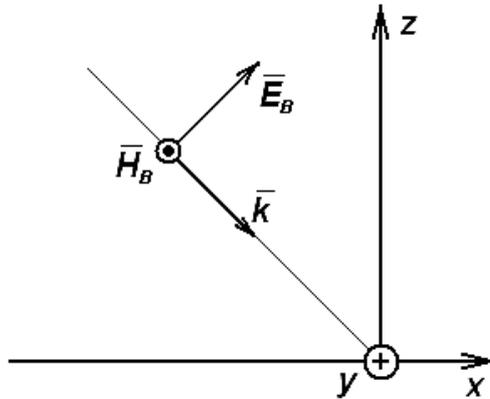


Рисунок 2.14 – Нормально поляризованная волна

В общем случае плоскую ЭМВ с произвольной поляризацией можно представить в виде суммы касательно и нормально поляризованных волн. Решив задачу для каждой из этих волн, путем суперпозиции полученных результатов можно найти решение для ЭМВ с произвольной поляризацией.

Рассмотрим основные закономерности для углов и коэффициентов отражения и преломления на границе раздела двух различных сред.

2.5.2 Законы преломления и отражения

Плоскость $z = 0$ – плоскость раздела 2-х сред с коэффициентами (рисунок 2.15) k_1 и k_2 . Векторы $\vec{l}_i, \vec{l}_R, \vec{l}_T$ – векторы, показывающие направления распространения падающей, отраженной и преломленной ЭМВ соответственно. Падающая ЭМВ – гармоническая функция частоты ω_i , φ_i – угол падения. Необходимо определить углы отражения φ_R и преломления φ_T .

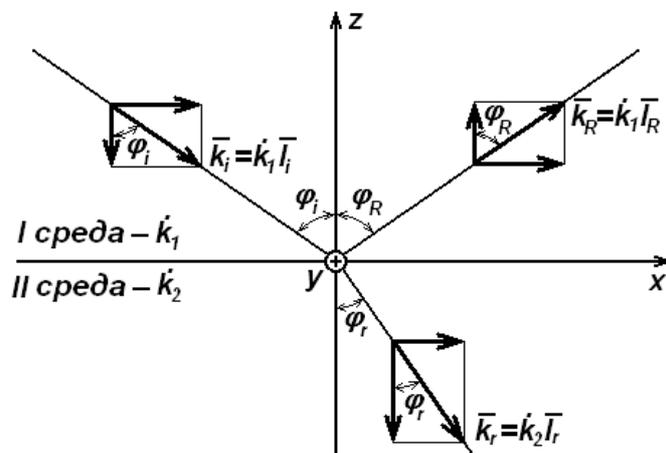


Рисунок 2.15 – К введению волнового вектора

В соответствии с формулой (2.84) векторы

$$\begin{aligned}\dot{\bar{E}}_i &= \dot{\bar{E}}_{i0} e^{-jk_1 \bar{l}_i} e^{j\omega_i t}; \\ \dot{\bar{E}}_R &= \dot{\bar{E}}_{R0} e^{-jk_1 \bar{l}_R} e^{j\omega_R t}; \\ \dot{\bar{E}}_r &= \dot{\bar{E}}_{r0} e^{-jk_2 \bar{l}_r} e^{j\omega_r t}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Сделаем следующие замечания к формулам (2.85).

1. Поскольку падающая волна $\dot{\bar{E}}_i = \dot{\bar{E}}_R + \dot{\bar{E}}_r$ и является гармонической функцией частоты ω_i , то отраженная и преломленная волны также являются гармоническими функциями ω_i , как слагаемые падающей волны, т.е.

$$\omega_i = \omega_R = \omega_r = \omega. \quad (2.86)$$

2. Из курса физики известно, что все три луча должны находиться в одной плоскости, т.е. векторы $\bar{l}_i, \bar{l}_R, \bar{l}_r$ должны лежать в одной плоскости (плоскости xOz) (см. рисунок 2.15). Поэтому

$$|\bar{l}_i| = |\bar{x}^0| \sin \varphi_i - |\bar{z}^0| \cos \varphi_i; \quad |\bar{l}_R| = |\bar{x}^0| \sin \varphi_R + |\bar{z}^0| \cos \varphi_R; \quad |\bar{l}_r| = |\bar{x}^0| \sin \varphi_r - |\bar{z}^0| \cos \varphi_r. \quad (2.87)$$

3. Векторы поля \bar{E} и \bar{H} всех трех волн должны удовлетворять граничным условиям во всех точках плоскости раздела и в любой момент времени. Это будет выполняться, в частности, если условия распространения для трех ЭМВ на границе раздела будут одинаковыми, т.е. на границе раздела будут равны их фазовые множители. Из формул (2.85) с учетом формул (2.86) и (2.87) найдем, что фазовые множители при $z = 0$

$$\omega t - \dot{k}_1 |\bar{x}^0| \sin \varphi_i = \omega t - \dot{k}_1 |\bar{x}^0| \sin \varphi_R = \omega t - \dot{k}_2 |\bar{x}^0| \sin \varphi_r,$$

или

$$\dot{k}_1 \sin \varphi_i = \dot{k}_1 \sin \varphi_R = \dot{k}_2 \sin \varphi_r. \quad (2.88)$$

Из формулы (2.88) следуют:
первый закон Снеллиуса (закон отражения): угол отражения равен углу падения

$$\varphi_R = \varphi_i. \quad (2.89)$$

второй закон Снеллиуса (закон преломления): отношение синусов углов преломления и падения есть величина постоянная для двух произвольных сред равна отношению комплексных постоянных распространения ЭМВ в первой и второй средах

$$\sin \varphi_r / \sin \varphi_i = \dot{k}_1 / \dot{k}_2. \quad (2.90)$$

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, то

$$\frac{\sin \varphi_r}{\sin \varphi_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_{a1}\mu_{a1}}}{\sqrt{\epsilon_{a2}\mu_{a2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_{\varphi 2}}{V_{\varphi 1}}, \quad (2.91)$$

где $n = \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ - коэффициент преломления среды.

Выражение второго закона Снеллиуса можно получить аналитически, используя только граничные условия. Из рисунка 2.15

$$D_{n1} = D_1 \cos \varphi_i ;$$

$$D_{n2} = D_2 \cos \varphi_r$$

$$D_{\tau 1} = D_1 \sin \varphi_i ;$$

$$D_{\tau 2} = D_2 \sin \varphi_r .$$

Используя (1.45) при отсутствии поверхностных зарядов получим

$$D_1 \cos \varphi_i = D_2 \cos \varphi_r ; \quad (2.92)$$

или, преобразуя,

$$D_2 = D_1 \frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_r} .$$

Из выражения (1.40) следует

$$\frac{D_1 \sin \varphi_i}{D_2 \sin \varphi_r} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} . \quad (2.93)$$

Подставляя (2.92) в (2.93) получаем

$$\frac{D_1 \sin \varphi_i \cos \varphi_r}{D_1 \sin \varphi_r \cos \varphi_i} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} . \quad (2.94)$$

Аналогично

$$H_{n1} = H_1 \cos \varphi_i ;$$

$$H_{n2} = H_2 \cos \varphi_r ;$$

$$H_{\tau 1} = H_1 \sin \varphi_i ;$$

$$H_{\tau 2} = H_2 \sin \varphi_r ;$$

откуда, используя (1.37), имеем

$$H_1 \sin \varphi_i = H_2 \sin \varphi_r,$$

то есть

$$H_2 = H_1 \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_r};$$

а из выражения (1.47) следует

$$\frac{H_1 \cos \varphi_i}{H_2 \cos \varphi_r} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}},$$

или

$$\frac{H_1 \cos \varphi_i \sin \varphi_r}{H_1 \cos \varphi_r \sin \varphi_i} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \quad (2.95)$$

Разделив правую и левую части выражения (2.94) на соответствующие части (2.95), получаем

$$\frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi_r} = \frac{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}};$$

или, окончательно приходим к формуле (2.91)

$$\frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_r} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}}.$$

2.5.3 Коэффициенты отражения и преломления для волн касательной поляризации

Коэффициентом отражения \dot{R} называется отношение комплексных значений векторов \dot{E}_R и \dot{E}_i , коэффициентом преломления \dot{r} - отношение комплексных значений \dot{E}_r и \dot{E}_i , т.е.

$$\dot{R} = \dot{E}_R / \dot{E}_i = |\dot{R}| e^{j\phi}; \quad \dot{r} = \dot{E}_r / \dot{E}_i = |\dot{r}| e^{j\gamma}. \quad (2.96)$$

Для определения R_r, r_r на границе раздела двух сред (рисунок 2.16) воспользуемся граничными условиями для касательных составляющих E_τ и H_τ при $\bar{J}_S = 0$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}.$$

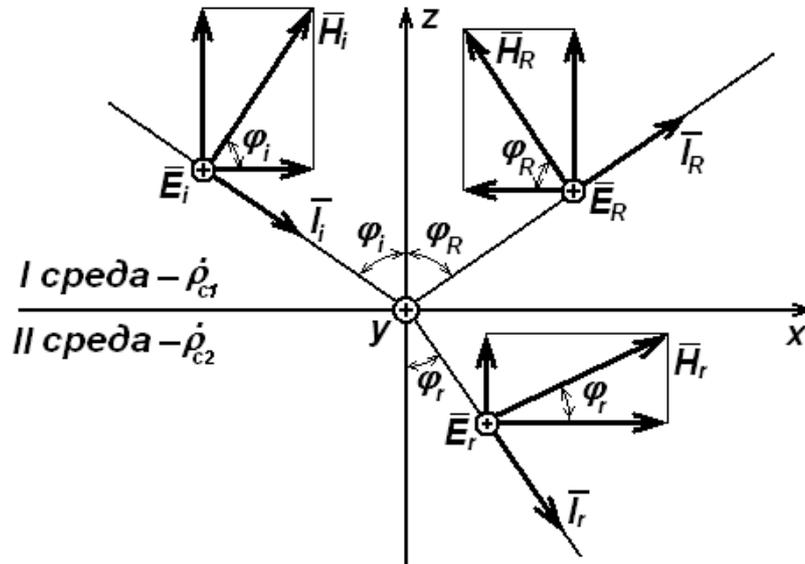


Рисунок 2.16 – Отражение и преломление для волн касательной поляризации

В соответствии с рисунком 2.16 можно записать

$$\dot{E}_{\tau 1} = \dot{E}_i + \dot{E}_R; \quad \dot{E}_{\tau 2} = \dot{E}_r \quad (2.97)$$

$$\dot{H}_{\tau 1} = \dot{H}_i - \dot{H}_{\tau R}; \quad \dot{H}_{\tau 2} = \dot{H}_r. \quad (2.98)$$

Поскольку:

$$\dot{H}_{\tau i} = \dot{H}_i \cos \varphi_i = \frac{\dot{E}_i}{\dot{\rho}_{c1}} \cos \varphi_i;$$

$$\dot{H}_{\tau R} = \dot{H}_R \cos \varphi_R = \frac{\dot{E}_R}{\dot{\rho}_{c1}} \cos \varphi_R; \quad (2.99)$$

$$\dot{H}_r = \dot{H}_r \cos \varphi_r = \frac{\dot{E}_r}{\dot{\rho}_{c1}} \cos \varphi_r.$$

Граничные условия с учетом формул (2.97)...(2.99) запишутся в виде

$$\dot{E}_i + \dot{E}_R = \dot{E}_r; \quad \frac{1}{\dot{\rho}_{c1}} (\dot{E}_i - \dot{E}_R) \cos \varphi_i = \frac{1}{\dot{\rho}_2} \dot{E}_r \cos \varphi_r,$$

а с учетом соотношений (2.96)

$$1 + \dot{R}_r = \dot{r}_r; \quad \dot{\rho}_{c2}(1 - \dot{R}_r) \cos \varphi_i = \dot{\rho}_{c1} \dot{r}_r \cos \varphi_r, \quad (2.100)$$

решением которых относительно \dot{R}_r и \dot{r}_r являются следующие формулы:

$$\dot{R}_r = \frac{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_i - \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_r}{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_i + \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_r}; \quad \dot{r}_r = \frac{2\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_i}{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_i + \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_r}. \quad (2.101)$$

Если I-я и II-я среды идеальные диэлектрики с параметрами $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}$ то

$$R_r = \frac{\sin(\varphi_r - \varphi_i)}{\sin(\varphi_r + \varphi_i)}; \quad r_r = \frac{2 \sin \varphi_r \cos \varphi_i}{\sin(\varphi_r + \varphi_i)}. \quad (2.102)$$

2.5.4 Коэффициенты отражения и преломления для волн нормальной поляризации

В соответствии с рисунком 2.17 граничные условия для E_r и H_r при $\bar{J}_S = 0$ будут иметь вид

$$\dot{E}_i \cos \varphi_i + \dot{E}_R \cos \varphi_i = \dot{E}_r \cos \varphi_r; \quad \frac{1}{\dot{\rho}_{c1}} (\dot{E}_i - \dot{E}_R) = \frac{1}{\dot{\rho}_{c2}} \dot{E}_r,$$

или

$$(1 + \dot{R}_B) \cos \varphi_i = \dot{r}_B \cos \varphi_r; \quad \dot{\rho}_{c2}(1 - \dot{R}_B) = \dot{\rho}_{c1} \dot{r}_B. \quad (2.103)$$

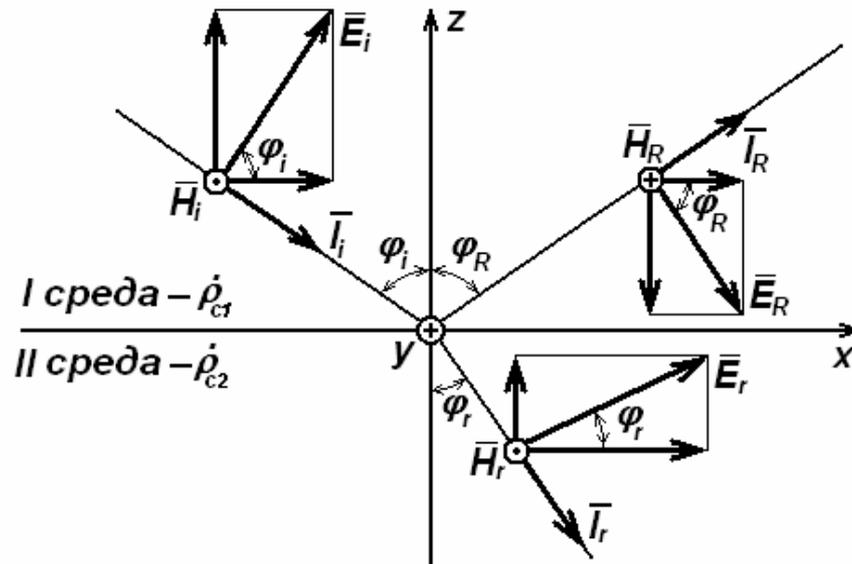


Рисунок 2.17 – Отражение и преломление для волн нормальной поляризации

Из решения уравнения (2.103) относительно \dot{R}_B и \dot{r}_B следует, что

$$\dot{R}_B = \frac{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_r - \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_i}{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_r + \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_i}; \quad \dot{r}_B = \frac{2\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_i}{\dot{\rho}_{c2} \cos \varphi_r + \dot{\rho}_{c1} \cos \varphi_i}. \quad (2.104)$$

Если I-я и II-я среды идеальные диэлектрики, то

$$R_B = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_r - \varphi_i)}{\operatorname{tg}(\varphi_r + \varphi_i)}; \quad r_B = \frac{2 \sin \varphi_r \cos \varphi_i}{\sin(\varphi_r + \varphi_i) \cos(\varphi_r - \varphi_i)}. \quad (2.105)$$

Из формул (2.102), (2.104) легко получить формулы коэффициентов отражения и преломления для ЭМВ, падающей на границу раздела нормально, положив $\varphi_i = \varphi_r = 0$

$$R_0 = \frac{\dot{\rho}_{c2} - \dot{\rho}_{c1}}{\dot{\rho}_{c2} + \dot{\rho}_{c1}}; \quad r_0 = \frac{2\dot{\rho}_{c2}}{\dot{\rho}_{c2} + \dot{\rho}_{c1}}, \quad (2.106)$$

из которых следует, что при нормальном падении ЭМВ на границу раздела сред исчезают различия между нормально (вертикально) и тангенциально (горизонтально) поляризованными ЭМВ.

Коэффициенты $\dot{R}_B, \dot{R}_r, \dot{R}_0, \dot{r}_B, \dot{r}_r, \dot{r}_0$ называются *коэффициентами Френеля*.

2.5.5 Анализ коэффициентов Френеля. Угол Брюстера. Критический угол

Наибольший интерес в электродинамике вызывает ЭМП отраженной волны (в частности при распространении радиоволн, в радиолокации и т.п.).

Из анализа формул (2.101), (2.102), (2.104), (2.105), (2.106) следуют достаточно важные выводы.

1. Коэффициенты отражения на границе раздела двух разнородных неидеальных сред ($\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0$) являются комплексными; на границе раздела двух разнородных идеальных сред ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ или $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \infty$) – вещественными. Величины модулей R_r, R_B, R_0 и их аргументов $\beta_r, \beta_B, \beta_0$ определяются электромагнитными параметрами граничащих сред, видом поляризации падающей ЭМВ и ее углом падения φ_i .

2. Для идеального проводника $\dot{\rho}_c \rightarrow 0$. Поэтому при всех значениях φ_i $|R_r| = |R_B|$; $\beta_r = \beta_B = \pi$ (рисунок 2.18), т.е. от поверхности идеального проводника ЭМП любой поляризации полностью отражается, изменяя при этом фазу на π (180°).

3. На границе раздела двух разнородных идеальных диэлектриков ($\epsilon_{a1} \neq \epsilon_{a2}, \mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$) для нормально поляризованной волны существует φ_i , при которой $R_B = 0$ (рисунок 2.19). Действительно, из формулы (2.105) следует, что $R_B = 0$, если $\varphi_r + \varphi_i = 90^\circ$, так как $\operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi_r) = \operatorname{tg}90^\circ = \infty$. Этот угол на-

зывается углом Брюстера ($\varphi_{i\text{бр}}$). Из формулы (2.105) следует, что при этом $\varphi_{i\text{бр}} + \varphi_r = 90^\circ$.

$$R_r = \frac{\sin(\varphi_r - \varphi_{i\text{бр}})}{\sin(\varphi_r + \varphi_{i\text{бр}})} = \sin(\varphi_r - \varphi_{i\text{бр}}) \neq 0.$$

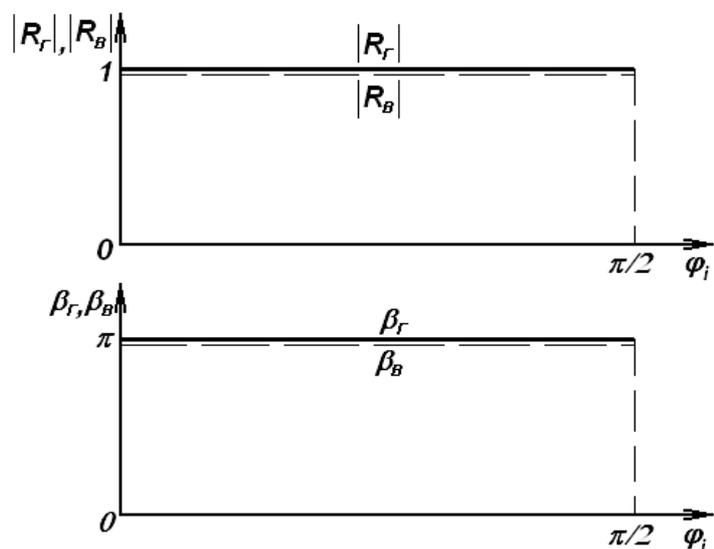


Рисунок 2.18 – Модуль и фаза коэффициента отражения ЭМВ от идеального проводника

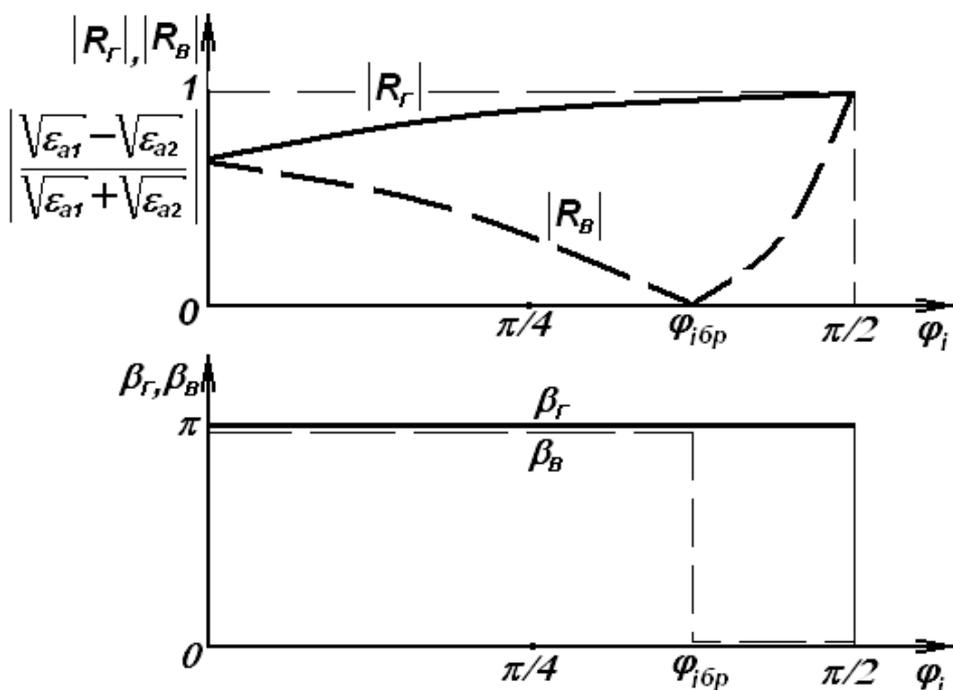


Рисунок 2.19 – Модуль и фаза коэффициента отражения ЭМВ на границе двух диэлектриков с $\epsilon_{a1} < \epsilon_{a2}$

Из 2-го закона Снеллиуса найдем, что при $\varphi_{i\text{бр}} + \varphi_r = 90^\circ$

$$\frac{\sin \varphi_{i\text{бр}}}{\sin \varphi_r} = \frac{\sin \varphi_{i\text{бр}}}{\sin(90^\circ - \varphi_{i\text{бр}})} = \frac{\sin \varphi_{i\text{бр}}}{\cos \varphi_{i\text{бр}}} = \operatorname{tg} \varphi_{i\text{бр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}},$$

откуда найдем, что

$$\varphi_{i\text{бр}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon_{a2} / \varepsilon_{a1}}. \quad (2.107)$$

4. Зависимость модулей R_r , R_B и их аргументов β_r , β_B от φ_i при $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_{a2}$ (т.е. при переходе ЭМП из оптически менее плотной в более плотную среду) показана на рисунке 2.19, из которого следует:

а) отраженная ЭМВ существует при всех значениях φ_i (кроме $\varphi_i = \varphi_{i\text{бр}}$ для нормально поляризованной ЭМВ);

б) преломленная ЭМВ существует при всех значениях φ_i , кроме $\varphi_i = 90^\circ$;

в) при всех значениях φ_i (кроме $\varphi_i = 0, 90^\circ$); $|R_r| > |R_B|$, при $\varphi_i = 0^\circ, 90^\circ$ $|R_r| = |R_B|$;

д) фаза отраженной волны касательной поляризации для всех значений φ_i равна π во всем диапазоне углов φ_i .

5. Зависимости модулей R_r , R_B и их аргументов β_r , β_B от φ_i при $\varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$ (т.е. при переходе из оптически более плотной в менее плотную среду) показаны на рисунке 2.20.

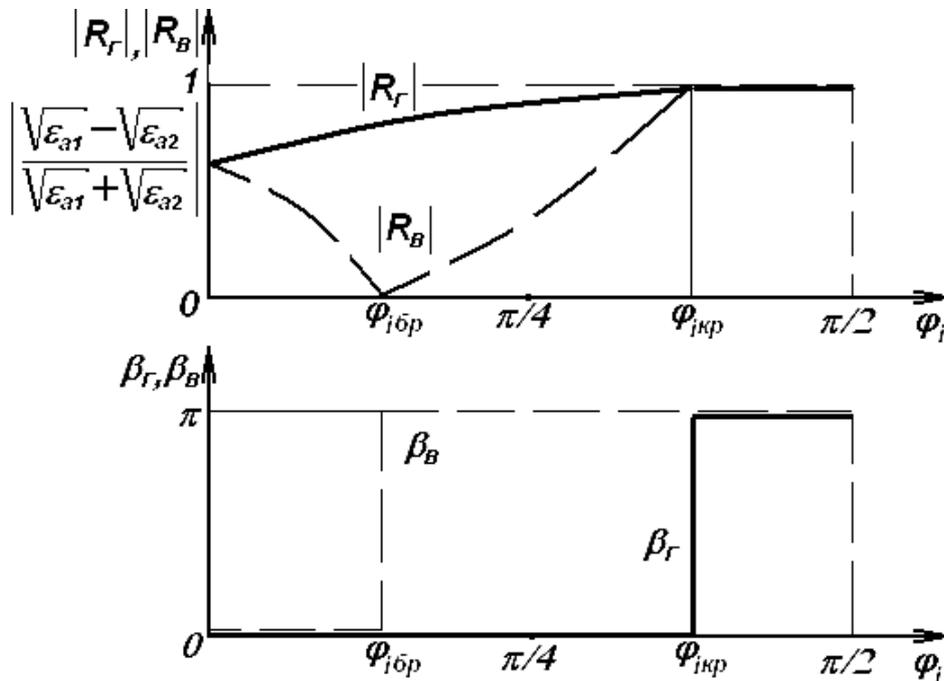


Рисунок 2.20 – Модуль и фаза коэффициента отражения ЭМВ на границе двух диэлектриков с $\varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$

Выводы а) и б), сделанные для $\epsilon_{a1} < \epsilon_{a2}$ справедливы и для данного случая, отличием от предыдущего случая является: ЭМВ любой поляризации полностью отражается на границе раздела 2-х сред и распространяется только в первой (в оптически более плотной среде) при некотором угле $\varphi_i = \varphi_{икр} < 90^0$, который называется *критическим*. Из 2-го закона Снеллиуса следует, что при $\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$ всегда найдется угол $\varphi_i = \varphi_{икр} < 90^0$ при котором

$$\sin \varphi_r = \sin \varphi_{икр} \sqrt{\frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}} = 1. \quad (2.107)$$

Из (2.107) найдем, что

$$\varphi_{икр} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}}. \quad (2.108)$$

Физический смысл (2.107): при $\varphi_i = \varphi_{икр}$ $\sin \varphi_r = 1$ $\varphi_r = 90^0$, т.е. преломленная ЭМВ распространяется вдоль границы раздела 2-х сред; при $\varphi_i > \varphi_{икр}$, $\sin \varphi_r > 1$, т.е. угол φ_r , коэффициенты R_r , R_v становятся комплексными величинами, а $|R_r| = |R_v| = 1$ и ЭМВ полностью отражается на границе раздела 2-х идеальных диэлектриков и полностью распространяется в более плотной среде, т.е. наблюдается явление полного внутреннего отражения.

Поскольку $\arctg \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}} < \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}}$, то $\varphi_{ибр} < \varphi_{икр}$, однако подстановка

$\varphi_i \geq \varphi_{икр}$ в формулы r_r и r_v не приведет к равенству $r_r = r_v = 0$, т.е. при полном отражении ЭМВ на границе раздела, преломленная ЭМВ во второй среде также существует. Это кажущееся парадоксальным явление будет рассмотрено ниже.

Фаза отраженной ЭМВ меняется скачком с нуля на π : при $\varphi_i = \varphi_{ибр}$ – для волны нормальной поляризации и при $\varphi_i = \varphi_{икр}$ для волны касательной поляризации.

2.5.6 Структуры полей в граничащих средах

Для упрощения анализа рассмотрим случай падения плоской ЭМВ на границу раздела идеального диэлектрика ($\sigma = 0$) и идеального проводника ($\sigma = \infty$), схематично изображенный на рисунке 2.21. Для волны касательной поляризации на границе раздела должны выполняться следующие граничные условия.

$$\begin{aligned} E_\tau &= 0, \\ D_n &= \rho_s, \\ H_n &= 0, \\ H_\tau &= J_s. \end{aligned} \quad (2.109)$$

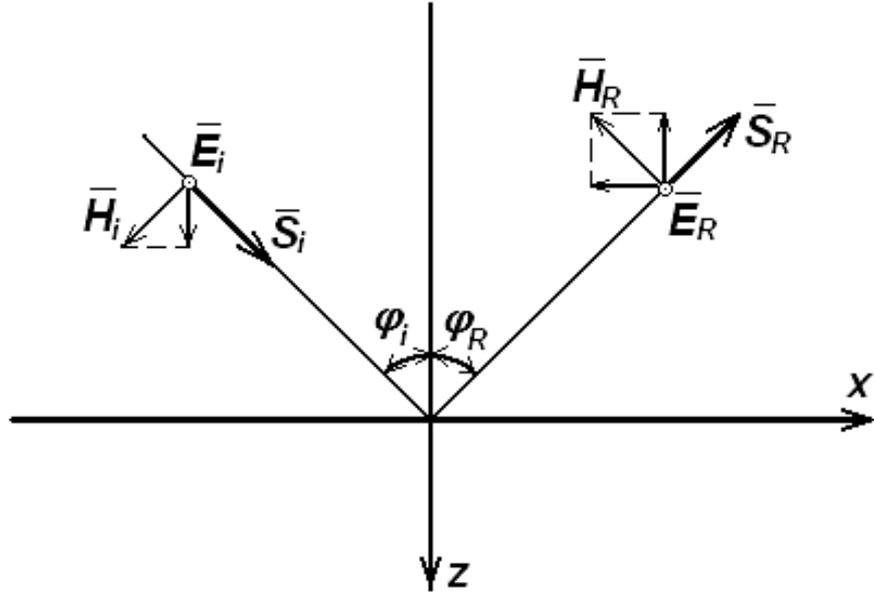


Рисунок 2.21 – Падение волны касательной поляризации на идеальный диэлектрик

При любом угле падения $\dot{R}_r=1$, $\dot{r}_r=0$, следовательно, поле во второй среде отсутствует, а поле в первой среде есть результат интерференции поля падающей и отраженной волн.

Граничные условия требуют, чтобы в отраженной волне тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля приобрели фазовый сдвиг, равный π . Комплексные амплитуды векторов магнитного поля падающей и отраженной волн с учетом (2.109) определяются выражениями

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_i &= (\bar{x}^0 \dot{H}_{ix} + \bar{z}^0 \dot{H}_{iz}) e^{jk_1(-x \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i)}, \\ \dot{\vec{H}}_R &= (\bar{x}^0 \dot{H}_{Rx} - \bar{z}^0 \dot{H}_{Rz}) e^{-jk_1(x \sin \varphi_R + z \cos \varphi_R)}.\end{aligned}\quad (2.110)$$

Результирующая напряженность поля в первой среде с учетом того, что $R_r=1, H_{R0}=R_r \cdot H_{i0}=H_{i0}$, $\varphi_i=\varphi_R$ равна

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_p &= \dot{\vec{H}}_i + \dot{\vec{H}}_R = \bar{x}^0 \dot{H}_{ix} \left[e^{jk_1(-x \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i)} + e^{-jk_1(x \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i)} \right] + \\ &+ \bar{z}^0 \dot{H}_{iz} \left[e^{jk_1(-x \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i)} - e^{-jk_1(x \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i)} \right] = \\ &= \bar{x}^0 2\dot{H}_{ix} e^{-jk_x x} \cos k_z z + \bar{z}^0 2j\dot{H}_{iz} e^{-jk_x x} \sin k_z z,\end{aligned}\quad (2.111)$$

где $k_x=k_1 \sin \varphi_i$; $k_z=k_1 \cos \varphi_i$; $\dot{H}_{ix} = \dot{H}_i \cos \varphi_i$; $\dot{H}_{iz} = \dot{H}_i \sin \varphi_i$.

В соотношении (2.111) восстановим временную зависимость и возьмем только реальную часть. Получим выражение для мгновенного значения вектора напряженности магнитного поля в первой среде

$$\begin{aligned} \bar{H}_p = \bar{x}^0 H_{i0} \cos \varphi_i \cdot \cos k_z z \cdot \cos (\omega t - k_x x) - \\ - \bar{z}^0 H_{i0} \sin \varphi_i \cdot \sin k_z z \cdot \cos (\omega t - k_x x), \end{aligned} \quad (2.112)$$

Мгновенное значение вектора \bar{E} можно получить аналогично

$$\bar{E}_p = \bar{y}^0 2E_i \sin k_z z \sin(\omega t - k_x x). \quad (2.113)$$

Из (2.112), (2.113) видно, что результирующее поле – *плоская неоднородная волна*, у которой поверхность равных фаз определяется уравнением $x = \text{const}$, а поверхность равных амплитуд $z = \text{const}$.

Вдоль оси z результирующее поле имеет характер стоячей волны с узлами (т.е. точками, где напряженность поля равна нулю) электрической составляющей в точках $z_0 = m\pi/k \cdot \cos \varphi_i$, $m=0;1;2;\dots$; ближайший к проводнику узел – $z_0 = 0$, что соответствует граничному условию $E_\tau = 0$ на поверхности проводника. Составляющая вектора \bar{H} , определяемая первым слагаемым формулы (2.112) и параллельная Ox в тех же точках имеет пучности (максимумы поля). Кроме того, существует H_z , узлы и пучности которой смещены относительно электрического поля на половину длины волны

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k_1 \cos \varphi_i} = \frac{\lambda_1}{\cos \varphi_i} > \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}. \quad (2.114)$$

Вдоль оси Ox также наблюдается пространственная периодичность поля с длиной волны

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2\pi}{k_1 \sin \varphi_i} = \frac{\lambda_1}{\sin \varphi_i} > \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}, \quad (2.115)$$

однако волна распространяется вдоль поверхности проводника (ось Ox) с фазовой постоянной (коэффициентом распространения) $k_x = k_1 \sin \varphi_i < k_1$. Фазовая скорость этой волны вдоль поверхности

$$V_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi_i} = \frac{c}{\sin \varphi_i} > c, \quad (2.116)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ – скорость света (электромагнитной волны) в вакууме.

Таким образом, результирующая картина поля имеет характер *стоячей волны* вдоль направления, перпендикулярного поверхности проводника, и *неоднородной бегущей* со скоростью большей, чем скорость света, волны вдоль его поверхности. Заметим, что такая волна в отличие от плоской имеет составляющую вектора \bar{H} , направленную вдоль направления распространения (вдоль поверхности проводника: в данном случае \bar{H}_x). Такие ЭМВ называют *плоскими электрическими волнами* (ТЕ) или волнами типа "Н" (рисунки 2.22).

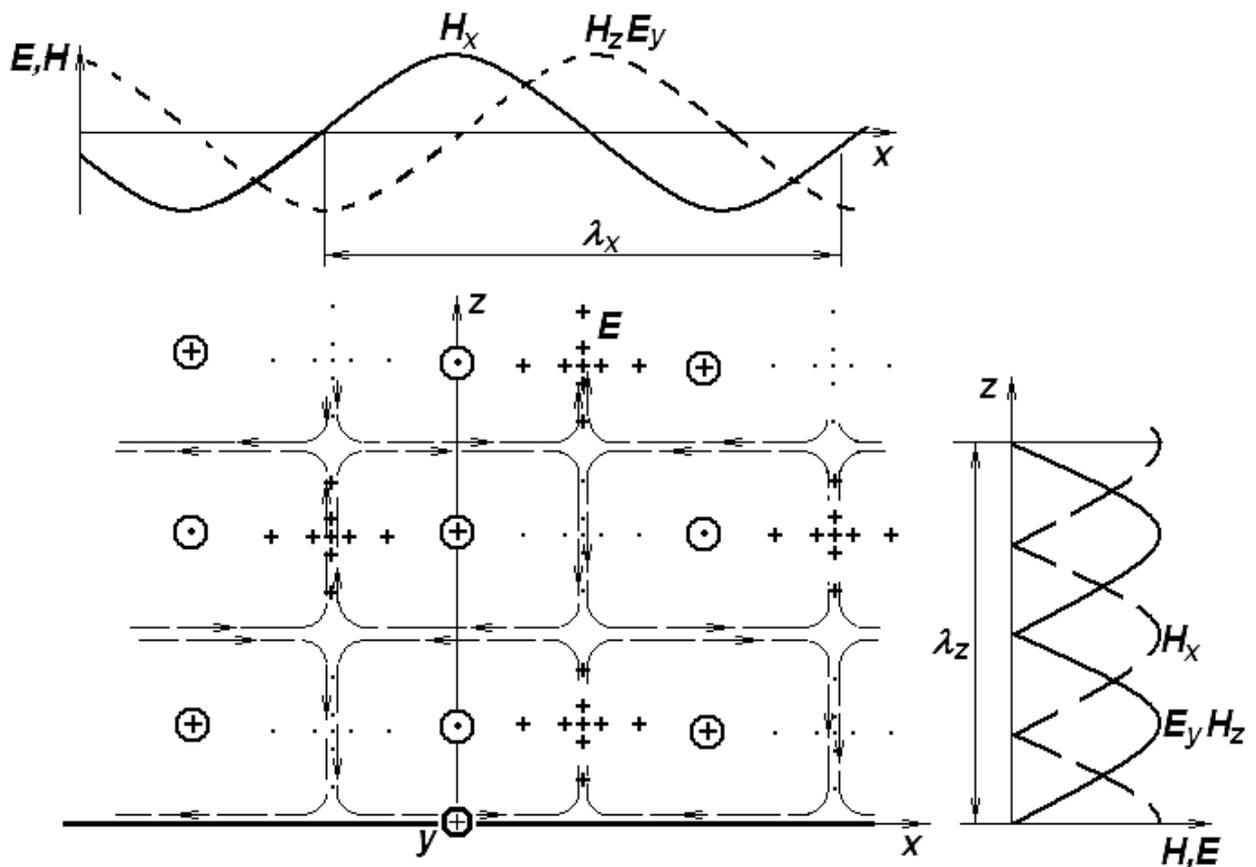


Рисунок 2.22 – Структура ЭМВ типа "H"

Для упрощения графического построения следует вспомнить, что силовые линии тока смещения повторяют структуру линий вектора \vec{E} и опережают его в пространстве на четверть длины волны $\frac{\lambda_x}{4}$, а линии вектора \vec{H} замыкаются вокруг линий тока смещения по правилу правого винта (буравчика).

Если на идеально проводящую поверхность будет падать ЭМВ с нормальной (перпендикулярной) поляризацией, то образуется волна, которая имеет продольную составляющую вектора \vec{E} и называется *плоской магнитной* (ТМ) или волной типа "Е". По свойствам и пространственной структуре она очень похожа на волну типа "H", но векторы \vec{E} и \vec{H} в ней меняются местами, а вся структура сдвигается на $\frac{\lambda_z}{4}$ из-за другого расположения векторов относительно границы раздела согласно различным для последних граничным условиям (рисунок 2.23).

Теперь вернемся к вопросу о структуре полей в первой и второй средах, когда обе они диэлектрики. На границе двух идеальных диэлектриков ЭМВ, падающая на границу раздела частично отражается, а частично проходит во вторую среду, преломляясь на границе раздела.

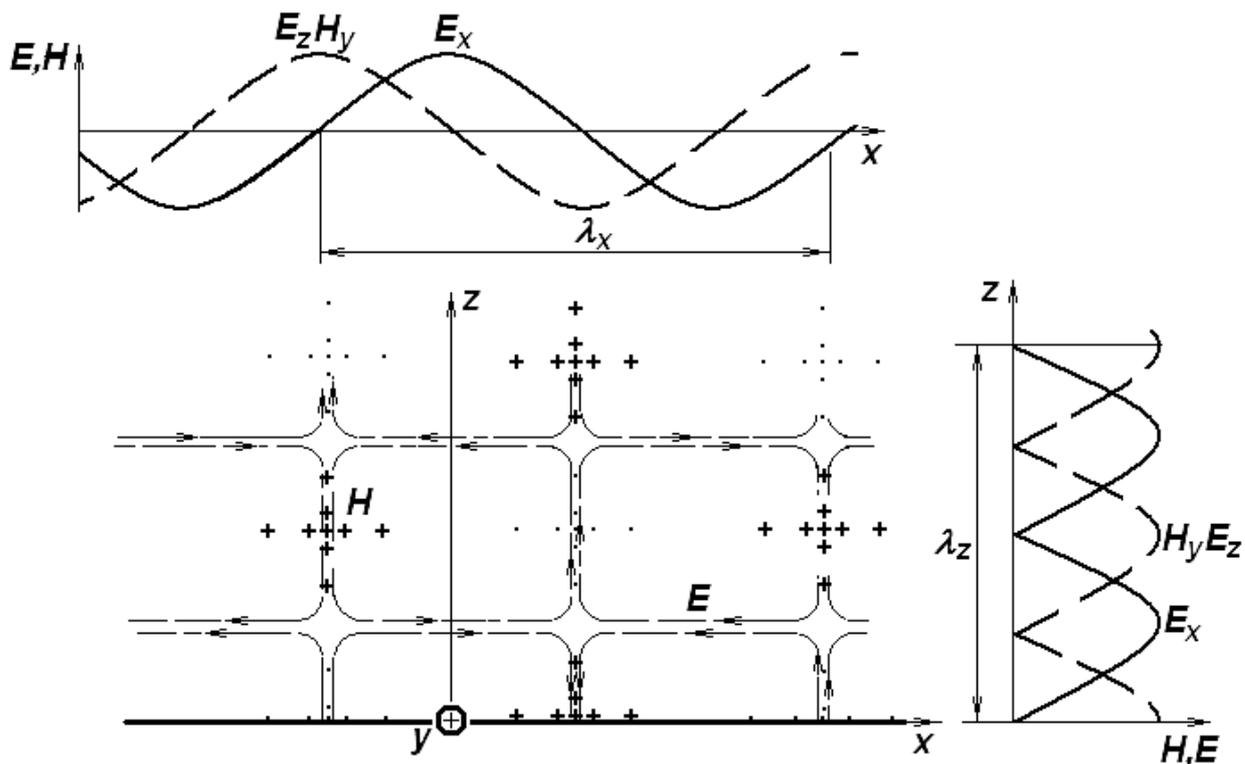


Рисунок 2.23 – Структура ЭМВ типа "E"

Структура поля в первой среде независимо от параметров второй среды (если только они отличны от параметров первой среды) представляет собой суперпозицию двух волн: падающей и отраженной. Так как в этом случае амплитуда отраженной волны всегда меньше, чем падающей, то и стоячая волна в первой среде образоваться не может. В первой среде образуется смешанная волна. Ее можно представить как сумму бегущей волны, амплитуда которой определяется долей энергии преломленной волны, и стоячей волны, амплитуда которой зависит от отраженной энергии. Соотношение между амплитудами падающей и отраженной волн определяется величиной различия электромагнитных параметров сред. Структура такой волны напоминает рассмотренные выше, но напряженности в узлах не равны нулю, а в пучностях меньше удвоенных значений.

Во второй среде условий для отражений нет, поэтому в ней распространяется обычная плоская ЭМВ в направлении, определяемом вторым законом Снеллиуса, со скоростью, равной скорости света во второй среде.

Интересен случай полного внутреннего отражения, когда волна падает из оптически более плотной среды в менее плотную ($\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$) под углом $\varphi_i > \varphi_{\text{икр}}$. В этом случае поле в первой среде ничем не отличается от поля при отражении от проводника, так как $R_r = R_b = 1$.

Во второй среде в этом случае преломленная волна должна распространяться под углом φ_r , причем $\sin \varphi_r > 1$. Это возможно если только угол φ_r ком-

плексный. Комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля преломленной волны можно определить так

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= \dot{E}_{r0} e^{-jk_2(x \sin \varphi_r + z \cos \varphi_r)} = \dot{E}_{r0} e^{-jk_2(x \sin \varphi_r - j\alpha z)} = \\ &= \dot{E}_{r0} e^{-k_2 \alpha z} \cdot e^{-jk_2 x \sin \varphi_r}\end{aligned}$$

или

$$E_r(t) = E_{r0} e^{-k_2 \alpha z} \cos(\omega t - k_2 x \sin \varphi_r). \quad (2.117)$$

Знак косинуса мнимого угла преломления выбран так, чтобы при увеличении z не происходило неограниченного увеличения амплитуды волны, что противоречит здравому смыслу.

Таким образом, при полном внутреннем отражении поле во второй среде независимо от угла падения распространяется вдоль границы раздела. Амплитуда волны при удалении от поверхности вглубь второй среды убывает по экспоненциальному закону. Такие волны называют *поверхностными*.

Коэффициент затухания $k_2 \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \varphi_i - 1}$ зависит от частоты и может быть значительным, при этом энергия поверхностной волны концентрируется у поверхности раздела. Фазовая скорость поверхностной волны

$$V_{\text{фх}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_2 \sin \varphi_r} \approx \frac{c}{\sin \varphi_r}. \quad (2.118)$$

Так как в данном случае $\sin \varphi_r > 1$, то $V_{\text{фх}} < c$, где c – скорость ЭМВ (света) во второй среде, то есть поверхностная волна является *замедленной*.

2.5.7 Прохождение волны в оптически более плотную среду. Поверхностный эффект

Оптически более плотной средой будем называть среду, для которой $\sigma_2 \gg \sigma_1$ или $\sigma_1 / \sigma_2 \approx 0$. Примером таких сред служит граница раздела "воздух – реальный проводник".

Из закона преломления получаем

$$\frac{\sin \varphi_r}{\sin \varphi_i} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx 0, \text{ откуда } \varphi_r \approx 0.$$

Из сказанного видно, что если трактовать φ_r как угол преломления, то преломленная волна распространяется по нормали к границе раздела независимо от угла падения (рисунок 2.24).

Тогда векторы поля преломленной волны касательны границе раздела. Для преломленной волны

$$\dot{\bar{E}}_r = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \cdot [\dot{\bar{H}}_r, \bar{z}^0], \quad \text{или} \quad \dot{\bar{E}}_{\tau 2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \cdot [\dot{\bar{H}}_{\tau 2}, \bar{z}^0]. \quad (2.119)$$

Согласно граничным условиям при $z = 0$ $\dot{\bar{E}}_{\tau 1} = \dot{\bar{E}}_{\tau 2}$; $\dot{\bar{H}}_{\tau 1} = \dot{\bar{H}}_{\tau 2}$, тогда для поля первой среды

$$\dot{\bar{E}}_{\tau 1} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \cdot [\dot{\bar{H}}_{\tau 1}, \bar{z}^0]. \quad (2.120)$$

В этом выражении $\rho_2 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = \frac{\dot{\bar{E}}_{\tau 2}}{\dot{\bar{H}}_{\tau 2}} = \dot{z}_s = R_s + jX_s$ - поверхностное сопротивление границы раздела.

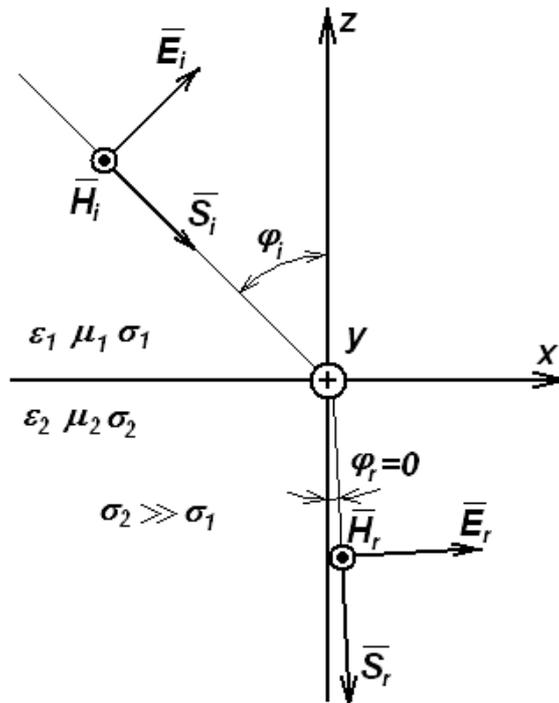


Рисунок 2.24 – Падение ЭМВ на границу проводника

Учитывая, что $\sigma_2 \gg 1$, получаем

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2} - j\frac{\sigma_2}{\omega}}} \approx \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{-j\sigma_2}} \approx e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{\sigma_2}}. \quad (2.121)$$

Поле в первой среде определяется только параметрами второй среды

$$\dot{\bar{E}}_{\tau 1} = e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{\sigma_2}} \cdot [\dot{\bar{H}}_{\tau 1}, \bar{z}^0]. \quad (2.122)$$

Можно ввести активную и реактивную составляющие поверхностного сопротивления (импеданса)

$$R_s = \operatorname{Re} \{ \dot{\rho}_s \} = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\sigma_2}} ; \quad X_s = \operatorname{Im} \{ \dot{\rho}_s \} = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\sigma_2}} . \quad (2.123)$$

Выражение (2.122) называют приближенным граничным условием Леонтовича – Щукина. Оно показывает, что тангенциальная составляющая на границе с реальным проводником хоть и мала, но не равна нулю. Это приводит к тому, что вектор Пойнтинга имеет нормальную составляющую

$$S_n = [\bar{E}_\tau, \bar{H}_\tau],$$

которая переносит энергию в толщу металла. Эта энергия превращается в тепловую, нагревая металл. Проникновение поля в проводник вызывает в нем ток, который убывает по экспоненциальному закону при удалении от поверхности

$$E_2 = E_0 e^{-\alpha z}, \quad \text{где} \quad \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_a}{2}} - \text{постоянная затухания. Неравномерность}$$

тока по глубине называется поверхностным эффектом. Расстояние от поверхности металла, на котором поле убывает в "е" раз, называется глубиной проникновения поля в проводник

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} . \quad (2.124)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Суть метода геометрической оптики.
2. Комплексный волновой вектор.
3. Дать определение плоскости падения.
4. Какая ЭМВ называется касательно (горизонтально) поляризованной?
5. Какая ЭМВ называется нормально (вертикально) поляризованной?
6. Каким образом можно представить ЭМВ с произвольной поляризацией?
7. 1-й закон Снеллиуса.
8. 2-й закон Снеллиуса.
9. Коэффициент отражения.
10. Коэффициентом преломления.
11. Выражения для коэффициентов отражения и преломления для волн касательной поляризации.
12. Выражения для коэффициентов отражения и преломления для волн нормальной поляризации.
13. Что такое Угол Брюстера? При каких условиях он возникает? Физическая сущность явления.
14. Критический угол.
15. Структуры полей в граничащих средах.
16. Прохождение волны в оптически более плотную среду.
17. Замедленные волны. Условия их возникновения.
18. Поверхностный эффект.
19. Приближенное граничное условие Леонтовича – Щукина. Его физический смысл.

2.6 Электромагнитное поле элементарных источников

Проблема излучения в электродинамике занимает одно из важнейших, если не самое важное место.

Теория излучения объясняет взаимодействие волн с потоками заряженных частиц и поэтому используется для расчета электронных и полупроводниковых приборов. Один из главных вопросов радиолокации – анализ отражения волн от объектов, введение понятия эффективной отражающей поверхности и разработка методов ее определения – также основан на результатах теории излучения.

Обращаясь к физике процессов излучения, можно утверждать, что свойства излучаемых волн существенно зависят от формы источника и закона изменения его параметров с течением времени.

Естественно исследовать волны от источника, обладающего самыми простыми свойствами. Если поле такого источника мы сумеем рассчитать, то возбуждение любым источником можно определить на основании принципа суперпозиции полей излучения простых источников, на которые можно разбить любой реальный источник.

Таким образом, мы приходим к понятию "элементарный излучатель", под которым будем подразумевать излучатель волн с наиболее простыми свойствами.

В теории излучения при расчетах используется три основных типа элементарных источника: элементарный электрический вибратор (диполь Герца); элементарный магнитный вибратор, элементарный поверхностный излучатель (источник Гюйгенса).

Поля излучения реальных излучателей (антенн) определяют, используя свойства элементарных источников и *принцип суперпозиции*.

Принцип суперпозиции вытекает из линейности уравнений Максвелла в обычных средах. Его суть: поле излучения любого реального источника может быть представлено в виде геометрической суммы полей отдельных элементарных источников, на которые можно разбить реальный источник. При этом поле реального источника учитывает амплитуды, фазы и поляризацию составляющих его полей.

2.6.1 Поле излучения элементарного электрического вибратора (диполя Герца)

Пусть имеется реальный источник в виде произвольного проводника длиной L с переменным током $I(\ell)$ (рисунок 2.25).

Элементарным электрическим вибратором (диполем Герца) называется прямолинейный участок реального источника длиной $d\ell \ll h$ и диаметром $d \ll d\ell \ll h$, в пределах которого амплитуда и фаза тока реального источника остаются неизменными, но изменяющимися от одного элемента $d\ell$ к другому.

Итак, элементарный электрический вибратор представляет собой *условно-сосредоточенный* источник.



Рисунок 2.25 – Элементарный электрический вибратор (диполь Герца)

Прямолинейный элементарный электрический вибратор длиной $\ell \ll h$ и диаметром $d \ll \ell \ll h$ находится в среде без потерь ($\sigma = 0$). По вибратору течет высокочастотный ток с $I_0 = \text{const}$.

Определим поле излучения такого излучателя.

Согласно условиям задачи излучатель представляет собой условно-сосредоточенный источник. Поэтому на большом удалении от такого источника волны расходятся радиусами от места расположения, т.е. вне источника волны должны быть сферическими и для решения задачи естественно выбрать *сферическую систему координат* r, θ, φ ; направление ортов $\bar{r}^0, \bar{\theta}^0, \bar{\varphi}^0$ показано на рисунке 2.26 (см. приложение В). Диполь Герца поместим в центр совмещенных декартовой и сферической систем координат и сориентируем его вдоль оси Z . Будем считать, что I_0 распределен по объему проводника вибратора с объемной плотностью $\bar{J}_{ст}$.

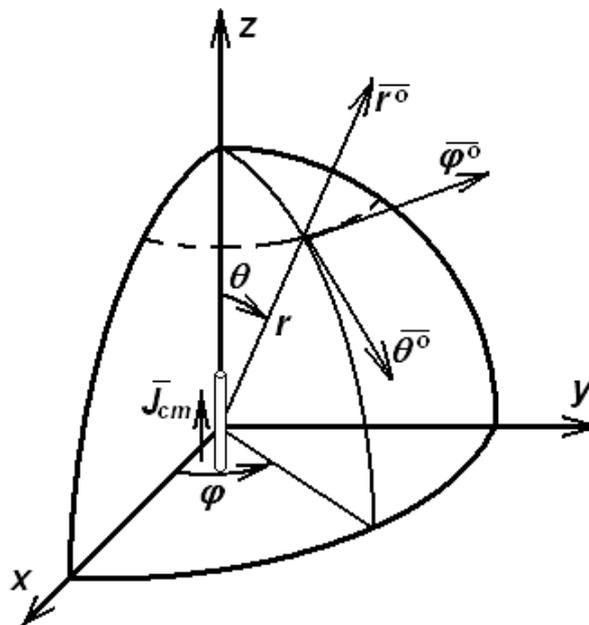


Рисунок 2.26 – Элементарный электрический вибратор в сферической системе координат

Для определения поля диполя воспользуемся неоднородным волновым уравнением Гельмгольца для электрического вектора Герца \bar{Z}_e .

$$\nabla^2 \dot{\bar{Z}}_e + k^2 \dot{\bar{Z}}_e = -\bar{J}_{cr} / j\omega\epsilon_a, \quad (2.125)$$

решением которого для условно-сосредоточенного источника является

$$\dot{\bar{Z}}_e = \frac{e^{-jkr}}{j4\pi r\omega\epsilon_a} \int \bar{J}_{cr} dV = -j \frac{e^{-jkr}}{4\pi r\omega\epsilon_a} \int \bar{J}_{cr} dV. \quad (2.126)$$

Представим $dV = dS d\ell$, где $dS = \frac{\pi d^2}{4} \ll h^2$, т.е. $d \rightarrow 0$, поэтому считаем, что ток течет вдоль диполя, т.е. $\bar{J}_{cr} = J_{cs} \bar{Z}^0$.

Согласно условию (2.125) $I_0 = J_s = \text{const}$ по всей длине ℓ диполя. Поэтому

$$\int \bar{J}_{cr} dV = \int \int \bar{J}_{cr} dS d\ell = \int J_{cs} \bar{Z}^0 d\ell = I_0 \ell \bar{Z}^0.$$

Тогда

$$\dot{\bar{Z}}_e = -j \frac{e^{-jkr}}{4\pi r\omega\epsilon_a} I_0 \ell \bar{Z}^0 = \dot{\Pi} \cdot \bar{Z}^0. \quad (2.127)$$

Ранее нами получены решения уравнения (2.12) для $\dot{\bar{Z}}_e$

$$\dot{\bar{E}}_e = \text{rot rot } \dot{\bar{Z}}_e - \bar{J}_{cr} / j\omega\epsilon_a; \quad \dot{\bar{H}}_e = j\omega\epsilon_a \text{rot } \dot{\bar{Z}}_e.$$

Определим значение $\text{rot } \dot{\bar{Z}}_e$ (где $\dot{\bar{Z}}_e = \dot{\Pi} \cdot \bar{Z}^0$), воспользовавшись известной из высшей математики формулой (см. приложение Б):

$$\text{rot } \dot{\bar{Z}}_e = \dot{\Pi} \cdot \text{rot } \bar{Z}^0 + [\text{grad } \dot{\Pi}, \bar{Z}^0] = [\text{grad } \dot{\Pi}, \bar{Z}^0]$$

В сферической системе координат $\text{grad } \dot{\Pi} = \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial r} \bar{r}^0$. Тогда согласно рисунку 2.26

$$[\text{grad } \dot{\Pi}, \bar{Z}^0] = \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial r} [\bar{r}^0, \bar{Z}^0] = -\frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial r} \sin \theta \cdot \bar{\varphi}^0.$$

С учетом формулы (2.127)

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\bar{Z}}_e &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(-j \frac{e^{-jkr}}{4\pi r\omega\epsilon_a} I_0 \ell \right) \sin \theta \cdot \bar{\varphi}^0 = j \frac{I_0 \ell}{4\pi\omega\epsilon_a} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \sin \theta \cdot \bar{\varphi}^0 = \\ &= j \frac{I_0 \ell}{4\pi\omega\epsilon_a} \left(\frac{-jke^{jkr} - e^{jkr}}{r^2} \right) \sin \theta \cdot \bar{\varphi}^0 = -j \frac{I_0 \ell}{2\pi r^2 \omega\epsilon_a} e^{-jkr} \cdot (1 + jkr) \sin \theta \cdot \bar{\varphi}^0. \end{aligned} \quad (2.128)$$

С учетом соотношения (2.128)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} &= j\omega\epsilon_a \operatorname{rot} \dot{\vec{Z}}_e = \frac{I_0 \ell}{4\pi r^2} e^{-jkr} (1 + jkr) \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0 = \\ &= \frac{k^2 I_0 \ell}{4\pi} e^{-jkr} \left[j \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] \cdot \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0.\end{aligned}\quad (2.129)$$

Из 1-го уравнения Максвелла следует, что $\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$, или матричной форме

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \begin{vmatrix} \vec{r}^0 & \vec{\theta}^0 & \vec{\varphi}^0 \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dot{H}_r & r \dot{H}_\theta & r \sin \theta \dot{H}_\varphi \end{vmatrix}.$$

При подстановке формулы (2.129) и проведении некоторых преобразований, найдем, что

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{k^2 I_0 \ell}{4\pi} e^{-jkr} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left\{ \left[\frac{2}{(kr)^2} - j \frac{2}{(kr)^3} \right] \cos \theta \cdot \vec{r}^0 - \left[j \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} - j \frac{1}{(kr)^3} \right] \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0 \right\}. \quad (2.130)$$

2.6.2 Анализ поля элементарного электрического вибратора

В зависимости от расстояния до вибратора различают: ближнюю зону, где $kr \ll 1$ или $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$; промежуточную зону, где $kr \approx 1$ или $r \approx \frac{\lambda}{2\pi}$; дальнюю зону, для которой $kr \gg 1$ или $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$.

Обычно при анализе поля конкретных источников наибольший интерес представляют дальняя и ближняя зоны.

В ближней зоне $kr \ll 1$, поэтому в выражениях (2.129), (2.130) определяющими будут слагаемые с высокой степенью $\frac{1}{kr}$. Поле в ближней зоне

$$\dot{\vec{H}} \approx \frac{I_0 \ell k^2}{4\pi(kr)^2} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0; \quad \dot{\vec{E}} \approx j \frac{I_0 \ell k^2}{4\pi(kr)^3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-jkr} [2 \cos \theta \cdot \vec{r}^0 - \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0]. \quad (2.131)$$

Из выражений (2.131) следуют выводы.

1. В ближней зоне вектор $\dot{\vec{H}}$ имеет одну (H_φ), а вектор $\dot{\vec{E}}$ - две составляющие (E_θ и E_r), как показано на рисунке 2.27.

2. Орты образуют правую тройку векторов, то есть перпендикулярны, следовательно, перпендикулярны и векторы $\dot{\vec{H}}$ и $\dot{\vec{E}}$.

3. Векторы $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (90°), так как $j=e^{j\frac{\pi}{2}}$, причем вектор $\dot{\vec{E}}$ опережает вектор $\dot{\vec{H}}$.

4. Амплитуда напряженности электрического поля уменьшается обратно пропорционально кубу, а амплитуда напряженности магнитного поля обратно пропорционально квадрату расстояния до излучателя, следовательно, мощность уменьшается обратно пропорционально шестой степени расстояния.

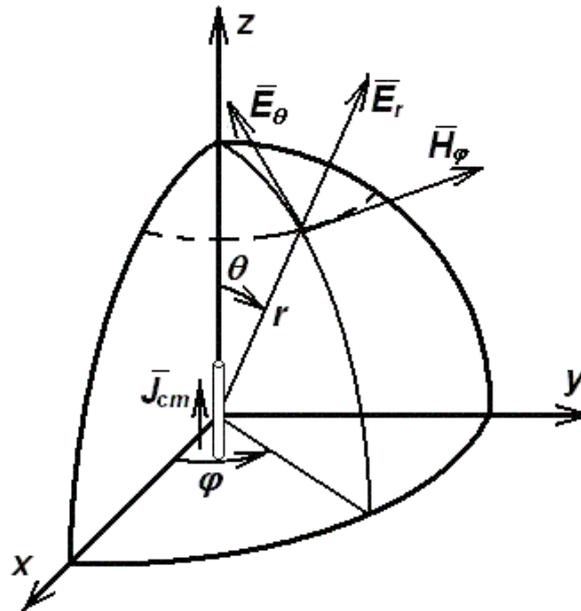


Рисунок 2.27 – Составляющие поля диполя Герца в ближней зоне

Поле, в котором векторы сдвинуты по фазе на 90° , называется *реактивным* (нераспространяющимся), в нем половину периода энергия переносится в одном направлении, другую половину – в противоположном (рисунок 2.28).

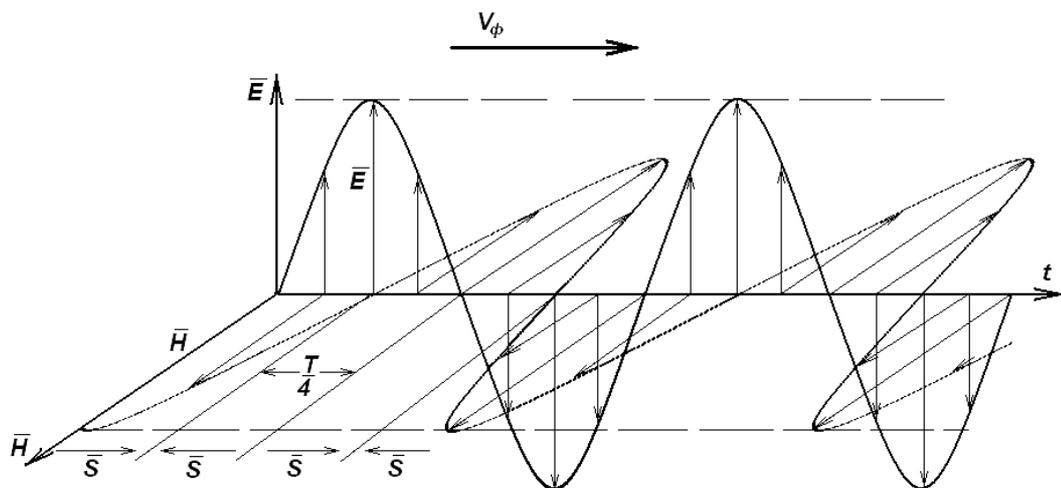


Рисунок 2.28 – Вектор Пойнтинга диполя Герца в ближней зоне

Энергия в ближней зоне колеблется по двум направлениям, так как вектор Пойнтинга имеет *две составляющие*

$$\bar{S}_\theta = [\bar{E}_r, \bar{H}_\phi], \quad \bar{S}_r = [\bar{E}_\theta, \bar{H}_\phi], \quad (2.132)$$

каждая из которых за период в среднем примерно равна 0. В дальнюю зону энергия попадает из-за приближенного выполнения условия ближней зоны, в результате чего есть часть поля, у которого $S_{cp} \neq 0$.

В *дальней зоне*, то есть на больших расстояниях от диполя выполняется условие $kr \gg 1$, тогда в выражения (2.129), (2.130) можно пренебречь слагаемыми с высокими степенями kr

$$\dot{\bar{E}} \approx j \frac{I_0 \ell k}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-jkr} \cdot \sin \theta \cdot \bar{\theta}^\circ; \quad \dot{\bar{H}} \approx j \frac{I_0 \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \cdot \sin \theta \cdot \bar{\phi}^\circ. \quad (2.133)$$

Из выражений (2.133) можно определить свойства ЭМП в дальней зоне элементарного вибратора.

1. Волна, излучаемая диполем Герца, - *сферическая*, так как, восстановив временную зависимость и взяв действительную часть (2.133), получаем

$$\bar{E} = \frac{I_0 \ell k}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin \theta \cdot \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right).$$

Приравняем фазу к произвольной константе $\omega t - kr + \frac{\pi}{2} = \text{const}$, откуда

$r = \frac{\omega t + \frac{\pi}{2} - \text{const}}{k}$ – аналитическое выражение сферы радиуса r в сферических координатах.

2. Векторы поля имеют по *одной* составляющей $\dot{\bar{E}}_\theta$ и $\dot{\bar{H}}_\phi$, которые перпендикулярны друг другу и перпендикулярны орту \bar{r}° (рисунок 2.29).

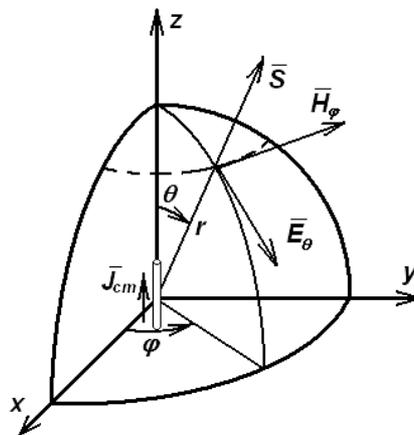


Рисунок 2.29 – Составляющие поля диполя Герца в дальней зоне

3. Амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей *обратно пропорциональны первой степени расстояния*.

4. Векторы поля \vec{E} и \vec{H} *синфазны*.

5. Вектор \vec{E} лежит в плоскости, проходящей через ось вибратора и не меняет своей ориентации при распространении, то есть поле *линейно поляризовано*.

6. Отношение $\frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \frac{E}{H} = \rho_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ величина постоянная, равная волновому

сопротивлению среды, в которой распространяется поле.

7. Вектор Пойнтинга направлен все время в *одну сторону* (вдоль \vec{r}^0) и имеет *одну составляющую* $\vec{S}_r = [\vec{E}_\theta, \vec{H}_\varphi]$.

8. Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\vec{S}_{cp} = \frac{1}{T} \int_T \vec{S} dt = \frac{1}{2} \frac{(I \ell k)^2}{(4\pi r)^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{r}^0, \quad (2.134)$$

то есть *плотность потока мощности в среде без потерь убывает обратно пропорционально квадрату расстояния*, благодаря чему возможно распространение электромагнитных волн на значительные расстояния.

В дальней зоне амплитуды и электрического и магнитного полей однозначно зависят от угловых координат. Для аналитического описания этой зависимости вводят специальную характеристику направленности, чаще называемую диаграммой направленности (ДН).

Амплитудной ДН называют зависимость амплитуды векторов ЭМП в равноудаленных точках дальней зоны от направления наблюдения, то есть от угловых координат θ и φ . Обозначают ДН – $f(\theta, \varphi)$, но чаще нормируют для удобства сравнения ДН различных источников и тогда $F(\theta, \varphi) = \frac{f(\theta, \varphi)}{f_{max}}$, а $F_{max} = 1$.

ДН – пространственная фигура, но обычно бывает достаточно рассмотреть ДН в главных плоскостях, чтобы иметь полное представление о направленных свойствах излучателя. ДН элементарного электрического вибратора при $\theta = \text{const} = 90^\circ$ $F(\varphi) = 1$; при $\varphi = \text{const}$ $F(\theta) = \sin \theta$ (рисунок 2.30). Пространственная фигура, которую представляет собой ДН диполя Герца, это тороид с нулевым внутренним диаметром.

Существует еще фазовая диаграмма направленности (фазовая характеристика), под которой понимают зависимость текущей фазы поля в дальней зоне от пространственных координат $\Phi = \Phi(\theta, \varphi)$, либо чаще $\Phi(\theta, \varphi, r) = \text{const}$. Фазовая характеристика (ФХ) представляет собой в пространстве поверхность равных фаз. Часто бывает достаточно рассмотреть лишь ФХ в главных плоскостях (а простейших случаях и в одной плоскости), чтобы иметь представление о фазовой структуре излучаемой волны. Т.к. свойства элементарных источников ЭМВ всегда удовлетворяют условиям пренебрежимой малости их размеров по

сравнению с длиной волны (условно-сосредоточенный источник), то фазовая характеристика их представляет собой сферу с центром в геометрическом центре источника, поэтому данный вопрос не исследуется ввиду тривиальности.

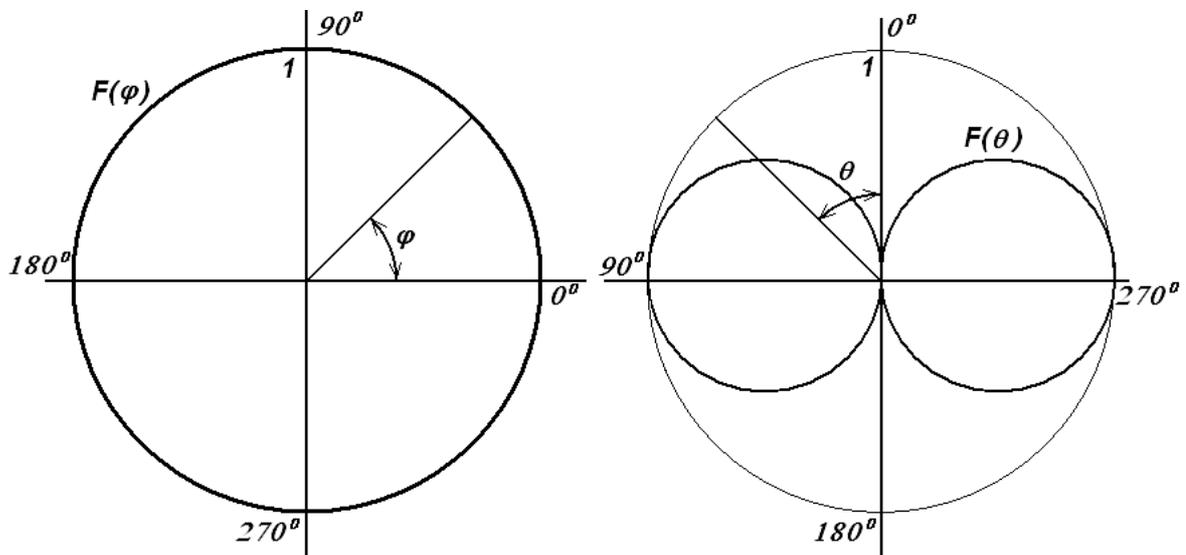


Рисунок 2.30 – Амплитудные ДН элементарного электрического вибратора в главных плоскостях

Необходимо подчеркнуть, что ДН и ФХ являются важными характеристиками излучателей и широко используются для описания свойств более сложных излучателей – различных антенных устройств и систем.

2.6.3 Мощность и сопротивление излучения элементарного вибратора

Определим один из важнейших для любого излучателя параметр – мощность, которую излучает диполь Герца. Для этого проинтегрируем среднюю за период мощность в дальней зоне по поверхности сферы S , окружающей диполь

$$P_{\Sigma} = \int_S \bar{S}_{cp} d\bar{S}, \quad (2.135)$$

в сферической системе координат элемент площади $d\bar{S} = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \cdot \bar{r}^0$, что вместе с (2.134) дает

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{I \ell k}{4\pi r} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{I^2 \ell^2 k^2}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (2.136)$$

Если элементарный электрический излучатель находится в свободном пространстве (вакууме), где $\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$, то

$$P_{\Sigma} = 10I_0^2 (k\ell)^2 = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2. \quad (2.137)$$

С другой стороны,

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\Sigma}, \quad (2.138)$$

откуда несложно получить сопротивление излучения диполя Герца

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 20(k\ell)^2. \quad (2.139)$$

Формула (2.139) показывает, что мощность излучения при данном токе в диполе тем выше, чем выше сопротивление излучения. Это позволяет сравнивать излучающую способность различных элементарных источников: чем больше $\frac{\ell}{\lambda}$, тем выше R_{Σ} , тем излучатель лучше. Формула (2.139) справедлива только при $\ell \ll \lambda$, поэтому R_{Σ} мало и составляет доли Ома. Следует помнить, что R_{Σ} лишь удобный расчетный параметр, имеющий размерность сопротивления. Смысл его заключается в том, что если к источнику электромагнитных колебаний подключить резистор с сопротивлением, равным R_{Σ} , то при той же амплитуде тока в последнем выделится мощность, равная мощности, излучаемой в пространство.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается и из чего вытекает принцип суперпозиции?
2. Что называется элементарным электрическим вибратором (диполем Герца)?
3. Какую систему координат естественно выбрать для анализа поля электрического вибратора и почему?
4. Элементарный электрический вибратор в сферической системе координат.
5. Какие зоны различают в зависимости от расстояния до вибратора?
6. Анализ поля элементарного электрического вибратора в ближней зоне.
7. Вектор Пойнтинга диполя Герца в ближней зоне.
8. Анализ поля элементарного электрического вибратора в дальней зоне.
9. Какую форму фронта имеет волна, излучаемая диполем Герца?
10. Как зависят амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей от расстояния?
11. Сколько и какие составляющие имеют векторы поля?
12. Записать выражения для составляющих поля диполя Герца в дальней зоне.
13. Какие фазовые соотношения между векторами поля \vec{E} и \vec{H} в дальней зоне?
14. Какую поляризацию имеет поле вибратора Герца в дальней зоне?
15. Вектор Пойнтинга в дальней зоне.
16. Среднее значение вектора Пойнтинга в дальней зоне.
17. Что называют амплитудной ДН? Амплитудные ДН элементарного электрического вибратора в главных плоскостях.
18. Мощность и сопротивление излучения элементарного вибратора.

2.7 Поле излучения элементарного магнитного вибратора и источника Гюйгенса

Из рассмотрения 1-го и 2-го уравнений Максвелла в дифференциальной форме при $\sigma = 0$, $\bar{J}_{ct} = 0$ $\text{rot}\bar{H} = j\omega\epsilon_a\bar{E}$; $\text{rot}\bar{E} = j\omega\mu_a\bar{H}$ следует, что одно уравнение переходит в другое. Если в них произвести замены, то получим условия перестановочной двойственности Максвелла

$$\bar{E} \leftrightarrow \bar{H} \quad \bar{H} \leftrightarrow -\bar{E}; \quad \epsilon_a \leftrightarrow -\mu_a; \quad \mu_a \leftrightarrow -\epsilon_a. \quad (2.140)$$

Суть принципа перестановочной двойственности уравнений Максвелла: если в исходной задаче ЭМП было вызвано электрическим током, то в новой задаче ЭМП будет вызываться фиктивным током; причем конфигурация силовых линий \bar{E} (\bar{H}) в новой задаче повторяет конфигурацию силовых линий \bar{H} (\bar{E}) в исходной задаче, а

$$\Gamma^e \rightarrow -\Gamma^m. \quad (2.141)$$

Граничные условия для новой задачи получаются из исходных граничных условий путем перестановок (2.140).

Этот принцип впервые обосновал и сформулировал в 1944 г. советский ученый А.А.Пистолькорс. Рассмотрим поле излучения элементарного магнитного вибратора в дальней зоне, используя принцип перестановочной двойственности.

2.7.1 Поле излучения элементарного магнитного вибратора (магнитной рамки)

Рассмотрим поле излучения магнитного вибратора в точке М (r, θ, φ), находящейся в дальней зоне. Виток расположен в центре совмещенных сферической и декартовой систем координат. Плоскость витка лежит в плоскости ХОУ (рисунок 2.31).

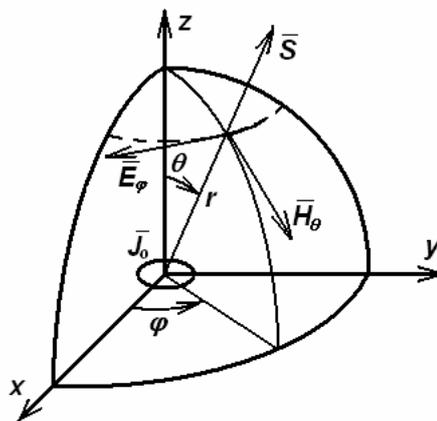


Рисунок 2.31 – Магнитная рамка в сферических координатах

Элементарным магнитным вибратором (магнитным диполем) называется виток (рамка) малых по сравнению с λ размеров ($\ell_B \ll \lambda$, $S_B \ll \lambda^2$), который обтекается током проводимости, изменяющимся во времени по синусоидальному закону с высокой частотой, а вдоль длины магнитного вибратора амплитуда и фаза тока проводимости остаются постоянными, т.е. $I_0 = \text{const.}$

Компоненты поля излучения магнитного диполя в дальней зоне можно получить, используя формулы для $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ диполя Герца в дальней зоне и принцип перестановочной двойственности формулы (2.133) и (2.140)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_\varphi &\approx j \frac{\dot{I}_0 \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0 \rightarrow E_\varphi \approx j \frac{\dot{I}_M \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0; \\ \dot{\vec{E}}_\theta &\approx j \frac{\dot{I}_0 \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0 \rightarrow \dot{H}_\theta \approx j \frac{\dot{I}_M \ell k}{4\pi r} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0.\end{aligned}\quad (2.142)$$

Найдем связь между \dot{I}_0 и \dot{I}_M . Для этого заменим магнитную рамку с S_B и током \dot{I}_0 эквивалентным ему магнитным диполем длиной ℓ и фиктивным \dot{I}_M . Равенство ЭМП в любой точке пространства рамки и диполя возможно, если равны их магнитные моменты $\dot{M}_p = \dot{M}_d$. Из курса физики известно, что $\dot{M}_p = \mu_a S_B \dot{I}_0$, $\dot{M}_d = q_M \ell$, где q_M - фиктивный заряд. Из равенства $\mu_a S_B \dot{I}_0 = \dot{q}_M \ell$ найдем, что

$$\dot{q}_M = \mu_a S_B \dot{I}_0 / \ell. \quad (2.143)$$

По определению магнитного заряда $\dot{I}_M = -\frac{dq_M}{dt}$, а с учетом (2.143)

$$\dot{I}_M = -j\omega \frac{\mu_a S_B}{\ell} \dot{I}_0. \quad (2.144)$$

С учетом (2.144) формулы (2.142) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned}\dot{E}_\varphi &= \frac{\mu_a \omega S_B \dot{I}_0 \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0 \approx \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} S_B \dot{I}_0 k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0 \approx \\ &\approx \frac{k^2 \dot{I}_0 S_B}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\varphi}^0;\end{aligned}\quad (2.145)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{\omega \mu_a S_B \dot{I}_0 \ell k}{4\pi r} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0 \approx -\frac{k^2 S_B \dot{I}_0}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \cdot \vec{\theta}^0. \quad (2.146)$$

2.7.2 Анализ поля магнитной рамки в дальней зоне

Из выражений (2.145) и (2.146) можно сделать аналогичные выводы, что и для поля электрического диполя. Отличия будут в следующем.

1. Векторы $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ в структуре поля на рисунке 2.29 поменяются местами (рисунок 2.31).

2. Мощность и сопротивление излучения магнитного диполя в свободном пространстве получаются равными

$$P_{\Sigma} = 10(I_B)^2(k^2 S_B)^2; R_{\Sigma} = 20(k^2 S_B)^2,$$

где $S_B = \frac{\pi d_B^2}{4} = \frac{\ell^2}{4\pi}$. Если предположить равными длину вибратора и длину витка рамки, можно сравнить их излучающие способности. Для этого найдем отношение сопротивлений излучения

$$\frac{R_{\Sigma E}}{R_{\Sigma M}} = \frac{20(k\ell)^2}{20(k^2 S_B)^2} = \frac{\ell^2}{k^2 S_B^2} = \frac{\ell^2}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{\ell^2}{4\pi}\right)^2} = 4\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2.$$

Если $\frac{\lambda}{\ell} = 20$, то $\frac{R_{\Sigma E}}{R_{\Sigma M}} = 1600$, то есть при одинаковой длине и одинаковых

токах элементарный электрический вибратор излучает в 1600 раз эффективнее, чем элементарная магнитная рамка.

ДН элементарного магнитного вибратора описывается теми же самыми выражениями, что и электрического

$$F(\theta) = \sin \theta;$$

$$F(\varphi) = \text{const},$$

однако максимум излучения приходится на плоскость, в которой лежит рамка. Так как векторы поля поменялись местами по сравнению с электрическим диполем, то и поляризация магнитной рамки также линейная, но вектор $\dot{\vec{E}}$ параллелен плоскости рамки (рисунок 2.32).

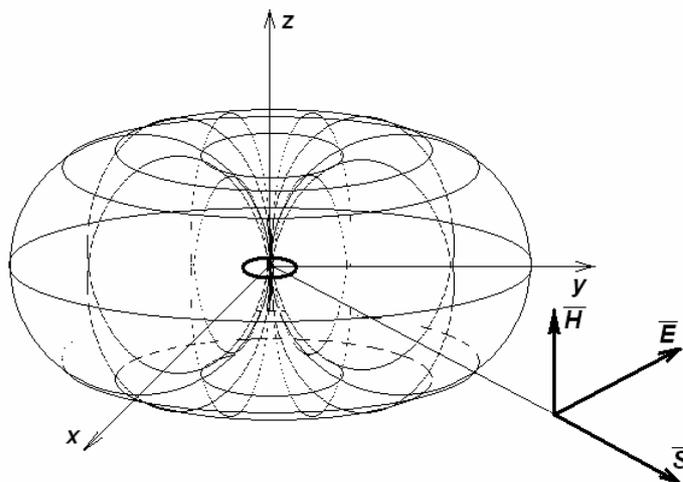


Рисунок 2.32 – Пространственная ДН рамки и векторы ЭМП в дальней зоне

2.8 Поле источника Гюйгенса

Суть принципа Гюйгенса: всякая точка среды, которой достиг фронт ЭВМ, рассматривается как самостоятельный источник элементарных ЭВМ, огибающая которых является новым фронтом ЭВМ (рисунок 2.33).

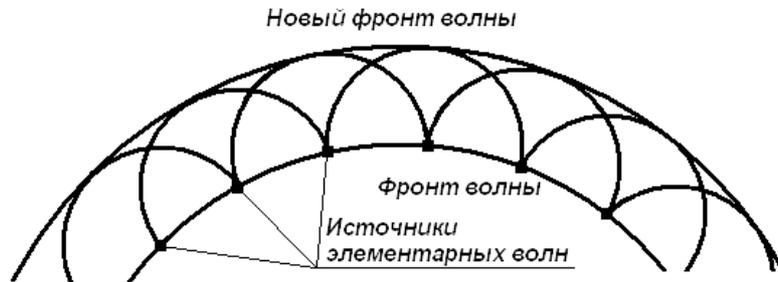


Рисунок 2.33 – К принципу Гюйгенса

Согласно принципу Гюйгенса элементарный поверхностный излучатель (источник Гюйгенса) представляет собой плоский элемент фронта ЭВМ с площадью $dS = dx dy$ ($dx \ll h, dy \ll h, dS \ll h^2$) ЭМП которого задается векторами $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$, лежащими в плоскости элементарного поверхностного излучателя (рисунок 2.34,а).

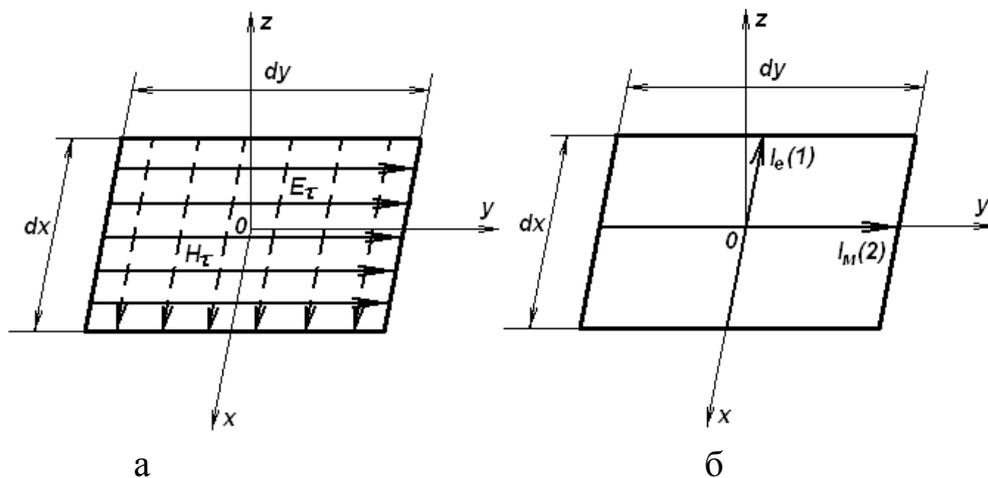


Рисунок 2.34 – Представление источника Гюйгенса в виде суперпозиции электрического и магнитного вибраторов

Пусть $E_\tau | \bar{x}^0$; $H_\tau | \bar{y}^0$. Тогда

$$\left[\bar{z}^0, \dot{\vec{H}}_\tau \right] = \dot{H}_\tau \left[\bar{z}^0, \bar{y}^0 \right] = -\dot{H}_\tau \bar{x}^0 = \dot{\vec{J}}_s^e. \quad (2.147)$$

Аналогично определим

$$\left[\bar{z}^0, \dot{\vec{E}}_\tau \right] = \dot{E}_\tau \left[\bar{z}^0, \bar{x}^0 \right] = -\dot{E}_\tau \bar{y}^0 = \dot{\vec{J}}_s^m, \quad (2.175)$$

где J_s^M - поверхностная плотность фиктивного магнитного тока.

С учетом формул (1.4) и (2.174) найдем величину и направление тока I_e

$$\bar{I}_e = \bar{J}_s^e d\bar{l}_1 = -N_\tau dx \cdot \bar{x}^0, \quad (2.176)$$

т.е. величина тока I_e определяется амплитудой вектора \bar{N}_τ и линейным размером поверхностного излучателя dx , направление I_e – противоположно направлению оси Ox .

Аналогично, с учетом формул (1.4) и (2.175) определим, что

$$\bar{I}_M = \bar{J}_s^M d\bar{l}_1 = E_\tau dy \cdot \bar{y}^0, \quad (2.177)$$

т.е. величина фиктивного тока I_M определяется амплитудой вектора E_τ и линейным размером элементарного поверхностного излучателя dy , направление I_M совпадает с направлением оси Oy . Ориентация токов I_M и I_e показана на рисунке 2.34,б.

Как следует из рисунка 2.34,б источник Гюйгенса можно представить в виде взаимно перпендикулярных элементарных источников: электрического вибратора (1) длиной dx с током I_e и магнитного вибратора (2) длиной dy с током I_M , лежащими в плоскости XOY , т.е. в плоскости, в которой лежит сам источник Гюйгенса.

Поле излучения источника Гюйгенса в дальней зоне можно представить как результат суперпозиции полей, создаваемых электрическим и магнитным вибратором в дальней зоне. Применительно к ориентации электрического (1) и магнитного (2) вибраторов, их ДН будут иметь вид, представленный на рисунке 2.35.

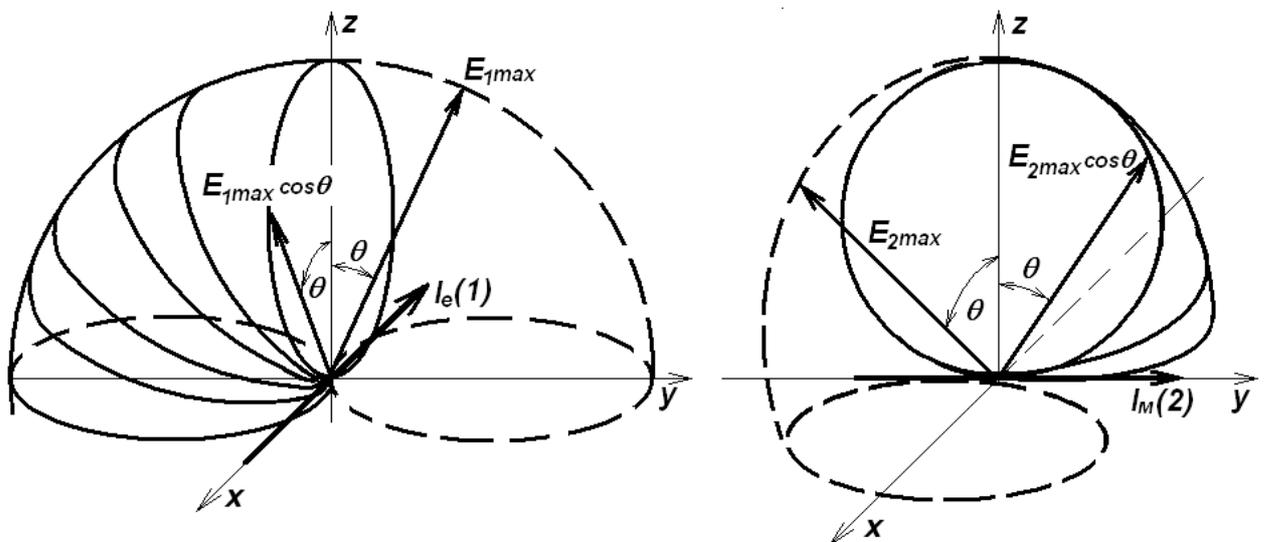


Рисунок 2.35 – Пространственные ДН электрического и магнитного вибраторов

Результирующее поле в точке $M(r, \theta, \varphi)$ можно представить как сумму полей, создаваемых вибраторами 1 и 2 в плоскостях XOZ и YOZ , амплитуда каждого из которых также определяется координатой φ . В плоскостях XOZ и YOZ каждое из полей представляет собой также сумму полей вибратора 1 и вибратора 2. В плоскости XOZ результирующее поле

$$E'(r, \theta) = E_{2\max} + E_{1\max} \cos \theta, \quad (2.178)$$

а в плоскости YOZ

$$E''(r, \theta) = E_{1\max} + E_{2\max} \cos \theta. \quad (2.179)$$

Определим $E_{1\max}$ электрического вибратора (1): согласно формулам (2.133), (2.176) и рисунку 2.34, а также учитывая, что $E_\tau / H_\tau = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ найдем

$$E_{1\max} \approx j \frac{I_e \ell k}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-jkr} \approx j \frac{k H_\tau dy dx}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-jkr} = j k \frac{E_\tau dS}{4\pi r} e^{-jkr}. \quad (2.180)$$

Аналогично из формул (2.145), (2.146), (2.177) и рисунка 2.34 найдем, что для магнитного вибратора

$$E_{2\max} \approx j \frac{I_m \ell k}{4\pi r} e^{-jkr} \approx j \frac{k E_\tau dx dy}{4\pi r} e^{-jkr} \approx j \frac{k E_\tau dS}{4\pi r} e^{-jkr}. \quad (2.181)$$

С учетом формул (2.180), (2.181)

$$E'(r, \theta) = E''(r, \theta) = j \frac{k E_\tau dS}{4\pi r} e^{-jkr} (1 + \cos \theta). \quad (2.182)$$

Из рисунка 2.35 следует, что в плоскости XOY , т.е. в плоскости закон изменения $E'(r, \theta)$ определяется ДН магнитного вибратора (2), а закон изменения $E''(r, \theta)$ - ДН электрического вибратора (1).

Из рисунка 2.35 следует, что

$$E_2(\varphi) = \cos(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi; \quad F_1(\varphi) = \sin \varphi; \quad (2.183)$$

$$E'(r, \theta, \varphi) = E'(r, \theta) F_2(\varphi) = E'(r, \theta) \cos \varphi; \quad (2.184)$$

$$E''(r, \theta, \varphi) = E''(r, \theta) F_1(\varphi) = E''(r, \theta) \sin \varphi.$$

Согласно формулам (2.180), (2.181) результирующее поле в точке дальней зоны $M(r, \theta, \varphi)$ равно

$$\bar{E}(r, \theta, \varphi) = E'(r, \theta, \varphi) + E''(r, \theta, \varphi) = j \frac{kE_{\tau} dS}{4\pi r} e^{-jkr} (1 + \cos \theta)(\sin \varphi + \cos \varphi). \quad (2.185)$$

Определим диаграмму направления источника Гюйгенса, ЭП которого в дальней зоне

$$E(r, \theta, \varphi) = E'(r, \theta, \varphi) + E''(r, \theta, \varphi).$$

Для аналитического описания ДН определим модуль геометрической суммы составляющих поля

$$E = \sqrt{|E'(r, \theta, \varphi)|^2 + |E''(r, \theta, \varphi)|^2}. \quad (2.186)$$

После подстановки в выражение (2.186) формул (2.184) и несложных преобразований найдем, что

$$E = \frac{kE_{\tau} dS}{4\pi r} (1 + \cos \theta). \quad (2.187)$$

Из формулы (2.187) следует, что источник Гюйгенса в отличие от элементарных электрического и магнитного вибраторов, в плоскости θ обладает односторонней направленностью, причем его нормированная ДН в плоскости θ и представляет собой кардиоиду (рисунок 2.36).

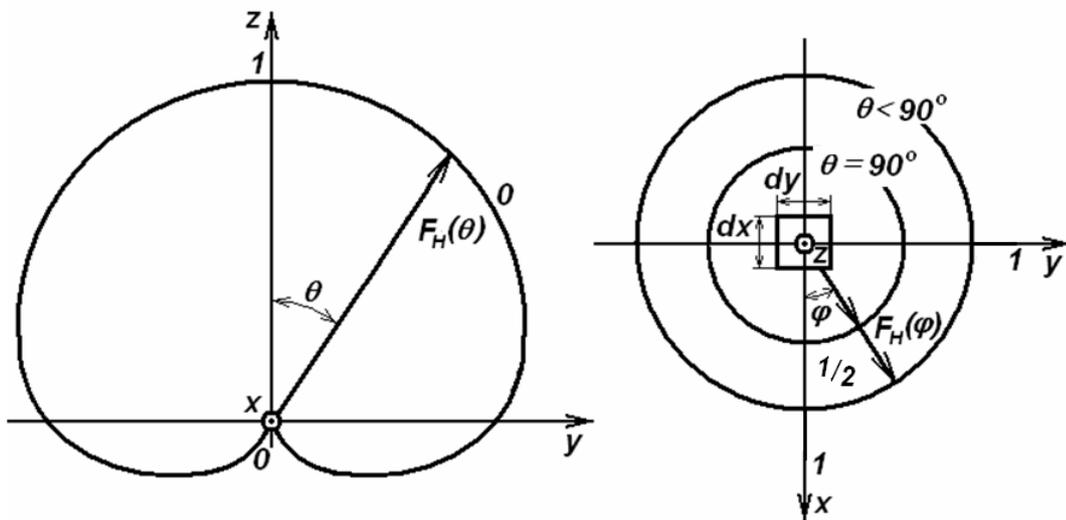


Рисунок 2.36 – Диаграммы направленности источника Гюйгенса

Выражение для нормированной ДН источника Гюйгенса

$$F_H(\theta) = \frac{E(\theta)}{E(\theta)_{\max}} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta). \quad (2.188)$$

В плоскости φ ($\theta = \text{const}$) нормированная ДН источника Гюйгенса (т.е. в плоскости которой находится сам источник) идентична ДН диполя Герца и магнитной рамки и представляет собой окружность с радиусом всегда меньше единицы (при $\theta = 90^\circ$ $F(\varphi) = 1/2$).

Вопросы для самоконтроля

1. Суть принципа перестановочной двойственности уравнений Максвелла.
2. Что называется элементарным магнитным вибратором (магнитным диполем)?
3. Магнитная рамка в сферических координатах.
4. Структура поля элементарного магнитного вибратора.
5. Мощность и сопротивление излучения магнитного диполя.
6. Какими выражениями описывается ДН элементарного магнитного вибратора?
7. Пространственная ДН магнитной рамки.
8. Суть принципа Гюйгенса.
9. Что представляет собой согласно принципу Гюйгенса элементарный поверхностный излучатель (источник Гюйгенса)?
10. Представление источника Гюйгенса в виде суперпозиции электрического и магнитного вибраторов.
11. Выражения для диаграмм направленности источника Гюйгенса в плоскостях θ и φ .
12. Графическое изображение диаграмм направленности источника Гюйгенса.

ГЛАВА 3 СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

3.1 Понятие о вычислительных методах современной электродинамики

Стремительное развитие вычислительной техники, появление персональных ЭВМ в полном смысле этого слова, увеличение их объемов памяти и быстродействия до невообразимых ранее цифр привело к возникновению направления в современной электродинамике – вычислительной электродинамики. Базирующаяся на уравнениях Максвелла теория электромагнитных явлений представляет собой естественную основу математического моделирования в технике, использующей эти явления. Согласно существующим воззрениям, которые вряд ли будут пересмотрены в обозримом будущем, система уравнения Максвелла вполне определяет закономерности электромагнитных процессов. Имея в виду макроскопические объекты, можно сказать, что надо лишь правильно формулировать входящие в эту систему материальные уравнения. Очень часто последние имеют простой вид, а среды характеризуются параметрами ϵ , μ и σ . Решение электродинамической задачи, т.е. некоторая совокупность математических операций (над уравнениями Максвелла при наложении тех или иных условий), даст исчерпывающие сведения о конкретном физическом процессе. Иными словами, математические модели электродинамики адекватны физической реальности. Казалось бы, в области электромагнитных явлений нет необходимости экспериментировать или заниматься трудоемкой отработкой макетов при помощи измерений, если все величины подлежат математически строгому расчету с единых позиций.

В действительности же до появления современных ЭВМ подобная постановка вопроса была бы бессмысленной, и только в последнее время появились прикладные программы, позволяющие формально и быстро осуществлять математическое моделирование сложных электродинамических объектов. Причем это математическое моделирование с точки зрения разработчика проявляется как реальное физическое.

Наиболее доступным и достаточно мощным программным продуктом, позволяющим производить расчет электродинамических структур, является пакет прикладных программ "Microwfve Office".

3.1.1 Проекционные методы

Задачи электродинамики, отвечающие объектам радиоэлектроники, почти всегда являются задачами дифракции. На приемную антенну падает некоторая волна, и нужно знать ее реакцию. В случае передающей антенны только при упрощении рассматривается излучение заданных источников, а в действитель-

ности распределение токов надо еще найти, и это – локальная задача дифракции. При рассмотрении и построении математических моделей электродинамики приходится решать различные промежуточные задачи. К ним относятся задачи о собственных волнах направляющих структур и о собственных колебаниях резонаторов.

Реальным объектам отвечают граничные задачи электродинамики: решения уравнений Максвелла должны удовлетворять известным условиям на границах раздела сред или некоторых подобластей.

Центральным является способ представления решения задачи, т.е. электромагнитного поля, называемый методом вычислительной ЭД.

Сущность того или иного метода состоит в том, что каким путем граничная задача сводится к системе алгебраических уравнений. Большой общностью обладает подход, называемый *методом*, или процессом *Бубнова-Галеркина* по именам двух выдающихся инженеров и ученых, наших соотечественников, пришедших к центральной идее в 1913-15 г.г.

Рассмотрим процесс Бубнова-Галеркина, т.е. построение основной проекционной схемы. Поставленную задачу сжато сформулируем в виде равенства:

$$L_u = f. \quad (3.1)$$

Здесь L – какой-либо оператор задачи, например, дифференциальный (с заданием граничных условий), интегральный или иной, будем полагать его линейным. В правой части – заданная функция f , выражающая обычно то или иное внешнее воздействие на объект. Символом u обозначено неизвестное решение задачи.

Рассмотрим тождественно равную нулю функцию $L_u - f = 0$. Разлагая ее в ряд Фурье по полной ортогональной системе $\{u_n\}$, мы должны положить все коэффициенты Фурье равными нулю:

$$(L_u - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.2)$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде ортогонального представления:

$$u^N = \sum_{n=1}^N a_n^N u_n, \quad (3.3)$$

где a_n^N - неизвестные коэффициенты; систему N функций $\{u_n\}_{n=1}^N$ будем называть базисом процесса Бубнова-Галеркина. Для каждой базисной функции u_n должно иметь смысл выражения $L u_n$, т.е. $u_n \in D_L$. Тогда представления u^N в форме (3.3) можно подставить в уравнение (3.2) вместо u . Сохраняя N таких соотношений, имеем:

$$(L u^N - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \int_V (\text{rot} \mathbf{H}_m - i\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}) \mathbf{E}_h^* dV &= 0, \\ \int_V (\text{rot} \dot{\mathbf{E}}_m + i\omega \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}}_m) \mathbf{H}_h^* dV &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $k = 1, 2, \dots, \infty$.

В методе Бубнова-Галеркина известное решение задачи представляется в форме:

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^N a_n^N \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^N b_n^N \mathbf{H}_n, \quad (3.10)$$

или – при переходе к индукциям:

$$\mathbf{D}^N = \epsilon_0 \sum_{n=1}^N p_n^N \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{B}^N = \mu_0 \sum_{n=1}^N q_n^N \mathbf{H}_n. \quad (3.11)$$

3.1.2 Дискретизационные методы

3.1.2.1 Коллокации

Рассматривая некоторую задачу, сформулированную в виде уравнения (3.1), выделим в области существования решения систему точек, как это схематически показано на рисунке 3.1.

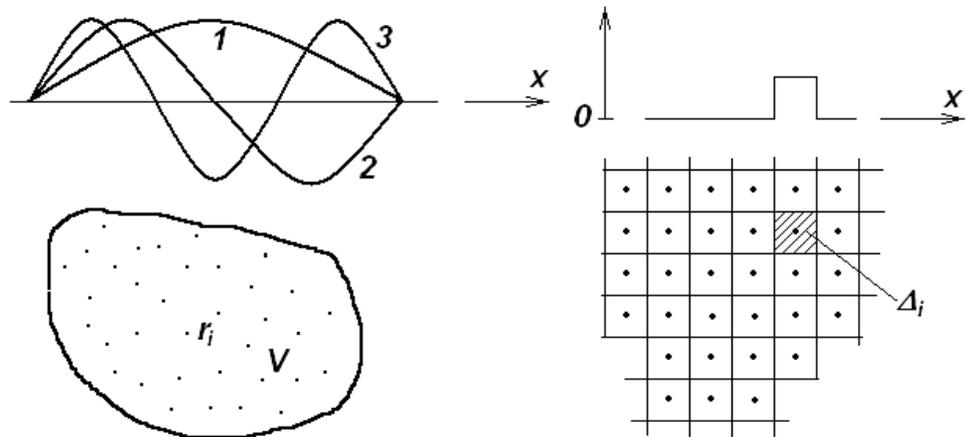


Рисунок 3.1 – Коллокационный метод нахождения приближенного решения задачи

Сохраняя представление решения (3.3) вместо проекционной формы (3.4) просто потребуем выполнения равенства

$$L u^N(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}_i), \quad (3.12)$$

где ($i = 1, 2, \dots, N$), что приводит к системе N алгебраических уравнений относительно N неизвестных коэффициентов представления (3.3)

$$\sum_{n=1}^N a_n^N L u_n(r_i) = f(r_i). \quad (3.13)$$

Это коллокационный метод нахождения приближенного решения задачи, задаваемой формулой (3.1), сводящий ее к алгебраической задаче согласно уравнению (3.13).

3.1.2.2 Разностные схемы

Как видно из предыдущего материала, для дискретизационного подхода характерно выделение в области задачи множества точек (рисунок 3.1), или, как говорят, сетки. Заметим, что поэтому дискретизационные методы в ряде случаев называют сеточными. На рисунке 3.2 показана равномерная координатная сетка в плоскости xOy с шагом h .

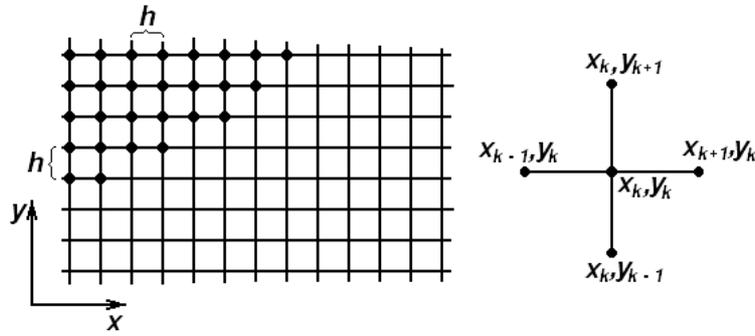


Рисунок 3.2 – Равномерная сетка в прямоугольной системе координат

Приближенный метод решения краевой задачи можно построить так, чтобы решение рассматривалось только в узлах сетки, т.е. в точках с координатами x_m, y_n . Для этого все производные в формулировке задачи надо заменить их конечно-разностными аналогами. Исходная задача сводится таким путем к системе линейных алгебраических уравнений посредством так называемой разностной схемы. Пусть нужно построить разностный аналог частной производной по x функции $u(x, y)$ в точке x_k, y_k ; значения $u(x_m, y_n)$ будем кратко обозначать $u_{m,n}$. Возможны, например, правый аналог $\ell_{\text{пр}}$ и левый $\ell_{\text{л}}$:

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{u_{k+1,k} - u_{k,k}}{h} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k}, \quad \ell_{\text{л}} = \frac{u_{k,k} - u_{k-1,k}}{h} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k}. \quad (3.14)$$

Если теперь требуется построить вторую частную производную, то пишут:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_k, y_k} \sim \frac{1}{h} (\ell_{\text{пр}} - \ell_{\text{л}}) = \frac{u_{k+1,k} - 2u_{k,k} + u_{k-1,k}}{h^2}. \quad (3.15)$$

Совершенно аналогично строится производная $\partial^2 u / \partial y^2$. Поэтому имеем следующий разностный аналог двумерного лапласиана $\nabla_{x,y}^2$:

$$\nabla_{x,y}^2 \Big|_{X_k, Y_k} \sim \frac{u_{k+1,k} + u_{k-1,k} + u_{k,k+1} + u_{k,k-1} - 4u_{k,k}}{h^2}. \quad (3.16)$$

Поэтому, если, например, решается граничная задача

$$\nabla_{x,y}^2 u = f \quad \text{в } S, \quad u = 0 \quad \text{на } L, \quad (3.17)$$

где фигурирует уравнение Пуассона, то для некоторого узла сетки с номером (k,k) согласно уравнению (3.16) имеем:

$$-u_{k+1,k} - u_{k,k+1} + 4u_{k,k} - u_{k-1,k} - u_{k,k-1} = -h^2 f_{k,k}, \quad (3.18)$$

что дает систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой будет очень разреженной: для всех внутренних точек – независимо от числа узлов – количество отличных от нуля элементов матрицы в строке равно пяти.

3.1.2.3 Конечные элементы

В процессе дискретизации можно строить представление решения в некоторых малых областях, называемых конечными элементами. Ранее уже рассматривался пример, позволяющий говорить о применении простейших конечных элементов в виде носителей констант Δ_i ; речь шла об алгоритмизации интегрального уравнения. Обычно под методом конечных элементов, который называется также проекционно-сеточным, принимают процесс Бубнова-Галеркина для некоторой краевой задачи, в котором базис формируется из функций, определенных не во всей области задачи, а на специально построенной системе носителей в ней. По таким функциям u_n , можно было бы построить представление решения задачи u_n , можно было бы построить представление решения задачи u^N по формуле (3.3), если оператор L – интегральный; выражение Lu_n при этом имеет смысл. Если же выполняется (обычно после преобразования (Lu_n, u_k) интегрированием по частям) операция однократного дифференцирования, то нужно, чтобы базисные функции были непрерывными. При этом конечно-элементарное представление u^N по формуле (3.3) строится из функций – крышек, носители которых пересекаются.

Существуют разные способы построения конечных элементов на поверхности и в объеме. Часто используется треугольная сетка, удобная, в частности, в случае криволинейной границы. При этом базисные функции можно строить в виде:

$$u_n = a_n + b_n x + c_n y, \quad (3.19)$$

где константы a_n , b_n и c_n однозначно связаны со значениями в узлах (вершинах треугольника). Совокупность всех узловых значений образует неизвестный

вектор решения. Весьма существенно, что представление u^N из формулы (3.3) в этом случае непрерывно. Представления типа выражения (3.19) образуют линейные конечные элементы более высокой степени.

3.1.3 Декомпозиционный принцип. Математическое моделирование сложных структур

Всякой электродинамической структуре можно сопоставить некоторую краевую задачу для уравнения Максвелла, затем в результате алгоритмизации (посредством применения одного из обсуждавшихся выше методов) мыслимо получить математическую модель, реализуемую на ЭВМ. Однако конфигурационная сложность, а также протяженность реальных технических объектов очень быстро ставят предел такому прямому подходу; не только существующие ЭВМ, но и те которые ожидаются в обозримом будущем, оказываются недостаточно мощными. Но и относительно простым объектам часто невыгодно сопоставлять краевую задачу, формулируемую для структуры как единого целого. Это ведет к слишком большому расходу машинного времени. Выходом из положения является расчленение структуры на независимо моделируемые части, автономные блоки. Такой подход называется декомпозиционным.

Начнем с рассмотрения простого для понимания примера. Чтобы построить математическую модель сложной волноводной структуры, было бы нерационально формулировать краевую задачу для всей области существования поля (рисунок 3.3). Рассечем соединительные волноводы поперечными плоскостями (они показаны штриховыми линиями), в результате чего оказываются выделенными частичные объекты A, B, C, \dots . Алгоритмизировать краевую задачу для каждого такого отдельного объекта гораздо легче. Сосредоточим внимание на объектах A и B . Рассматривая каждый из них с присоединением полубесконечных волноводов, мы можем в результате решения краевых задач определить их матрицы рассеяния S^A и S^B . Таким образом имеем соотношения:

$$S_{c+}^{AA} = C^A, \quad S_{c+}^{BB} = C^B, \quad (3.20)$$

в которые входят векторы падающих и отраженных волн для объектов A и B .

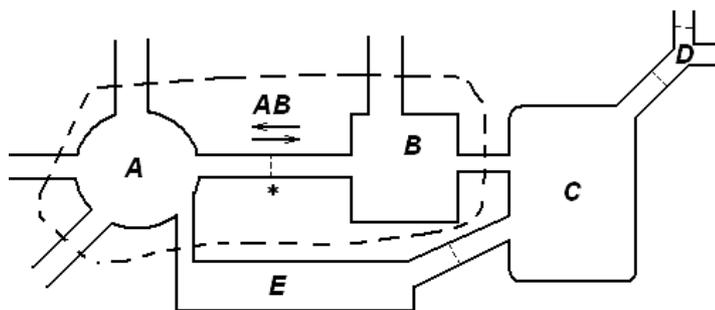


Рисунок 3.3 – Выделение областей в сложной структуре

Порядки матриц $\overset{A}{S}$ и $\overset{B}{S}$ вообще различны ($n_A \neq n_B$); они равны количествам учтенных типов волн. Отмечая, что объекты А и В соединены волноводом (+), в котором учтено k волн, перепишем равенства (3.20)

$$\begin{pmatrix} \overset{A}{S}^{11} & \overset{A}{S}^{12} \\ \overset{A}{S}^{21} & \overset{A}{S}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{A}{C}_1^{1+} \\ \overset{A}{C}_2^{A+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{A}{C}_1^- \\ \overset{A}{C}_2^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \}^{h_A-k} \\ \\ \}^k \end{matrix}; \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} \overset{B}{S}^{11} & \overset{B}{S}^{12} \\ \overset{B}{S}^{21} & \overset{B}{S}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{B}{C}_1^+ \\ \overset{B}{C}_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{B}{C}_1^- \\ \overset{B}{C}_2^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \}^{h_B-k} \\ \\ \}^k \end{matrix},$$

где порядок столбцов и строк выбран так, что последние k компонент каждого вектора относятся к волнам общего волновода.

Ясно, что волны общего волновода, которые являются падающими для объекта В, будут отраженными для объекта А (и наоборот).

Поэтому подвекторы $\overset{A}{C}_2^\pm$ и $\overset{B}{C}_2^\pm$ в (3.21) подчинены следующим условиям связи:

$$\overset{A}{C}_2^+ = \overset{B}{C}_2^-, \quad \overset{A}{C}_2^- = \overset{B}{C}_2^+. \quad (3.22)$$

Рассматривая последние клеточные строки равенств (3.21) с учетом условий связи (3.22) получаем:

$$\begin{aligned} -\overset{A}{S}^{22} \overset{A}{C}_2^+ + \overset{B}{S}^{22} \overset{B}{C}_2^+ &= \overset{A}{S}^{21} \overset{A}{C}_1^+, \\ \overset{A}{C}_2^+ - \overset{B}{S}^{22} \overset{B}{C}_2^+ &= \overset{B}{S}^{21} \overset{B}{C}_1^+. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Решая эту систему уравнений относительно подвекторов общего канала находим:

$$\begin{aligned} \overset{A}{C}_2^+ \equiv \overset{B}{C}_2^- &= \left(\overset{B}{I} - \overset{B}{S}^{22} \overset{A}{S}^{22} \right)^{-1} \left(\overset{B}{S}^{22} \overset{A}{S}^{21} \overset{A}{C}_1^+ + \overset{B}{S}^{21} \overset{B}{C}_1^+ \right), \\ \overset{A}{C}_2^- \equiv \overset{B}{C}_2^+ &= \left(\overset{A}{I} - \overset{A}{S}^{22} \overset{B}{S}^{22} \right)^{-1} \left(\overset{A}{S}^{21} \overset{A}{C}_1^+ + \overset{A}{S}^{22} \overset{B}{S}^{21} \overset{B}{C}_1^+ \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Посредством этих соотношений нетрудно исключить $\overset{A}{C}_2^\pm$ и $\overset{B}{C}_2^\pm$ из уравнения (3.21).

Результат запишем в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^+ \\ C_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^+ \\ C_1^- \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{где } S^{11} &= S^{11} + S^{12} \left(I - S^{22} S^{22} \right)^{-1} S^{22} S^{21}; & S^{12} &= S^{12} \left(I - S^{22} S^{22} \right)^{-1} S^{21}, \\ S^{21} &= S^{21} + S^{22} \left(I - S^{22} S^{22} \right)^{-1} S^{21}; & S^{22} &= S^{22} + S^{22} \left(I - S^{22} S^{22} \right)^{-1} S^{21}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Смысл состоит в том, что найдено соотношение между векторами падающих и отраженных волн для того фрагмента волноводной структуры АВ, который на рисунке 3.3 заключен в штриховую рамку. Теперь ясно, как получить матрицу рассеяния всей структуры, которую можно обозначить символами АВ...Е. Надо принять фрагмент АВ за новый объект А, а С за новый объект В и по формулам (3.26) найти матрицу рассеяния расширенного фрагмента АВС. Затем аналогично присоединяются объекты Д и Е.

Итак, на первом этапе производится декомпозиция сложной структуры и находятся матрицы рассеяния полученных ее частей, автономных блоков. На втором этапе выполняется рекомпозиция математической модели полной структуры, т.е. получение ее матрицы рассеяния по матрицам рассеяния автономных блоков. Описание автономных блоков при помощи матриц рассеяния охватывает все мыслимые режимы этих блоков, а объединение этих матриц на втором этапе восстанавливает именно те связи, которые реализуются в полной структуре. Все подробности можно рассматривать как автономные многомодовые блоки (АМБ) как это пояснено на рисунке 3.4.

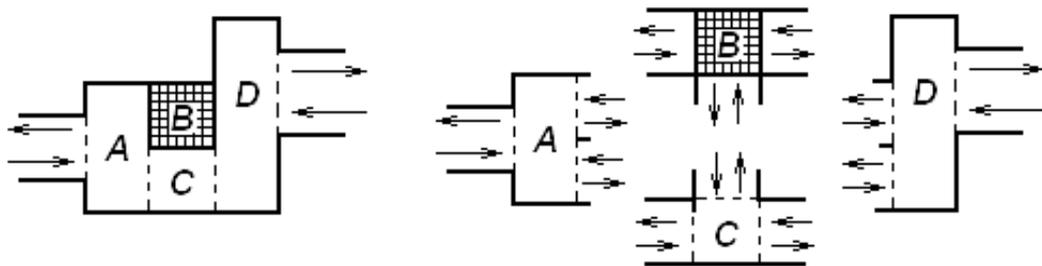


Рисунок 3.4 – Автономные многомодовые блоки

Для того чтобы сделать очевидным принципиальное сходство с прежней структурой (см. рисунок 3.3), введем в рассмотрение виртуальные каналы –

бесконечно короткие волноводы, которыми якобы соединены подобласти. Математическая модель всего объекта (рисунок 3.4) получается путем рекомпозиционных операций которые можно проводить по формулам (3.26). Но более удобным оказывается применение матриц проводимости. Такой подход называется методом автономных многомодовых блоков.

На основе декомпозиционного подхода был разработан новый дискретизационный метод. Он был построен специально для задач электродинамики. Как в методе конечных элементов в данном случае строится система элементарных подобластей. Однако в отличие от него поле внутри этих подобластей, называемых минимальными автономными блоками (МАБ), точно удовлетворяет уравнениям Максвелла, так что требуется только сшить представления решения на границах соседних подобластей. В этом смысле метод конечных элементов и метод МАБ соотносятся как процессы Бубнова-Галеркина и Трефтца. Но этим вопрос не исчерпывается. В методе МАБ каждая элементарная подобласть выступает как независимая электродинамическая система; она описывается своей матрицей рассеяния, известной заранее, независимо от того, в какой конкретной структуре эта подобласть выделена. Это автономный блок. Минимальным он называется потому, что минимизирован базис, в котором представляется граничное поле.

Матрицы рассеяния различных МАБ (не только кубических и не только для случая изотропной среды) известны. Применение метода МАБ сводится к использованию рекомпозиционных формул (3.26) и еще нескольких стандартных действий. В отличие от других дискретизационных методов – в силу декомпозиционного характера – метод МАБ не требует формулирования системы алгебраических уравнений, отвечающей структуре в целом.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть метода или процесса Бубнова-Галеркина?
2. Оператор Максвелла.
3. В какой форме представляется известное решение задачи в методе Бубнова-Галеркина?
4. Каким образом применительно к уравнениям Максвелла записывается проекционная форма?
5. Требование, налагаемое на приближенное решение.
6. Что такое базисные функции?
7. Что такое коллокационный метод нахождения приближенного решения задачи?
8. Разностные схемы.
9. Дайте понятие конечного элемента.
10. Способы построения конечных элементов на поверхности и в объеме.
11. Сформулируйте декомпозиционный принцип.
12. Математическое моделирование сложных структур.
13. Что такое автономные многомодовые блоки?
14. Какие АМБ можно назвать минимальными автономными блоками и почему?

3.2 Основная задача теории регулярных линий передачи и ее решение

Электромагнитные устройства, предназначенные для канализации энергии СВЧ в заданном направлении, называются линиями передачи энергии СВЧ (направляющими системами или волноводами). В отличие от свободных ЭМВ, существующих в свободном пространстве, в линиях передачи волны являются связанными, т.е. не являются расходящимися, а локализуются вдоль некоторого диэлектрического канала, имеющего вдоль всего своего протяжения поперечные размеры, сравнимые с длиной волны источника возбуждения.

Различают два основных типа линий передачи. Гладкие регулярные линии передачи, в которых фазовая скорость, как будет показано далее, больше или равна скорости света, называют волноводами быстрых волн. Второй тип линий передачи основан на использовании в качестве волновода различного типа замедляющих систем, поэтому их называют волноводами медленных волн.

3.2.1 Классификация линий передачи. Типы линий передачи

Линии передачи (фидеры – от *англ.* to feed – питать) бывают самых различных конструкций и геометрических размеров. Большое их разнообразие обусловлено прежде всего диапазоном используемых частот, а также требованиями, предъявляемыми к ним, основными из которых являются: передача ЭМЭ с минимальными потерями; отсутствие излучения ЭМЭ; высокая электрическая прочность; экономичность (приемлемые поперечные размеры, механическая прочность и масса; простота конструкции; малая стоимость).

В зависимости от числа проводящих поверхностей P (связность волновода) ЛП могут быть (см. рисунок 3.5):

односвязные ($P = 1$) – ЛП в поперечном сечении имеет одну замкнутую проводящую поверхность (полные волноводы);

многосвязные ($P > 1$) – ЛП в поперечном сечении имеет несколько не прикасающихся и непересекающихся замкнутых проводящих поверхностей (например, коаксиальный волновод или двухпроводная линия, имеющие две такие поверхности).

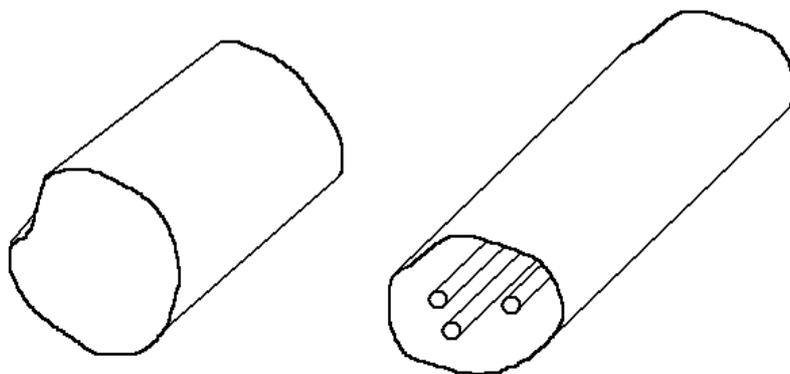


Рисунок 3.5– Односвязная (волновод) и многосвязная линии передачи

Различают также:

линии открытого типа, в которых передаваемая ЭМЭ не экранирована от окружающего пространства. К ним относятся – двухпроводные и многопроводные ЛП из металлических проводов (они мало излучают, если расстояние между проводами значительно меньше длины волны); полосковые и микрополосковые линии; диэлектрические волноводы; волокно-оптические волноводы; линии поверхностных волн (волноводы замедленных волн).

линии закрытого типа, в которых передаваемая ЭМЭ экранирована от окружающего пространства. К ним относятся: радиочастотные кабели различных типов, коаксиальные волноводы, полые металлические трубы (волноводы) с различной формой в поперечном сечении: прямоугольные, круглые, специального профиля.

Линия передачи называется регулярной, если в ее продольном направлении (вдоль оси Oz) неизменны поперечное сечение и электромагнитные свойства заполняющих сред. В регулярной линии нет условий для возникновения отраженной волны, поэтому анализ свойств электромагнитных волн в таких линиях значительно проще. Сначала ограничимся лишь рассмотрением однородных регулярных линий передачи без потерь энергии. В дальнейшем учтем потери введением соответствующих коэффициентов затухания.

3.2.2 Решение мембранного и телеграфного уравнений. Типы полей (волн). Распространяющиеся и нераспространяющиеся поля

Дана регулярная ЛП с поперечным сечением произвольной формы. Проводимость стенок линии бесконечна, а проводимость заполняющего линию диэлектрика равна нулю (такие линии называют идеальными). Источники поля гармонические и удалены в бесконечность ввиду отсутствия потерь. Введем обобщенную цилиндрическую систему координат $\bar{\xi}^0, \bar{\eta}^0, \bar{z}_0$, как показано на рисунке 3.6.

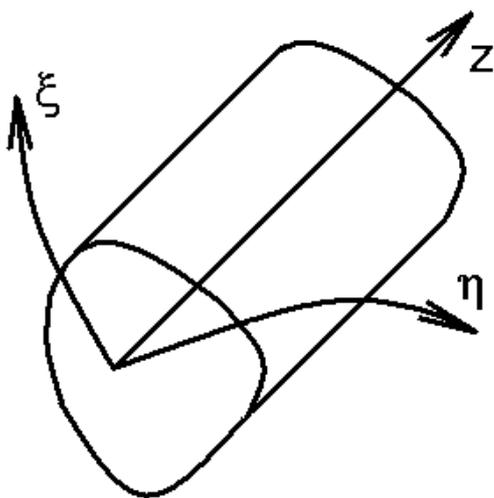


Рисунок 3.6 – Линия передачи в обобщенной системе координат

Используем для определения векторов поля волновое уравнение для векторов Герца

$$\nabla^2 \dot{\bar{Z}}_{e,h} + k^2 \dot{\bar{Z}}_{e,h} = 0,$$

решениями которого являются выражения

$$\dot{\bar{E}}_e = \text{rot rot } \dot{\bar{Z}}_e; \quad \dot{\bar{H}}_e = j\omega\epsilon_a \text{rot } \dot{\bar{Z}}_e; \quad (3.27)$$

$$\dot{\bar{E}}_h = -j\omega\mu_a \text{rot } \dot{\bar{Z}}_h; \quad \dot{\bar{H}}_h = \text{rot rot } \dot{\bar{Z}}_h. \quad (3.28)$$

В работах известных отечественных математиков А.Н.Тихонова и А.А.Самарского доказано, что при заданных условиях векторы Герца можно выразить только через их продольные проекции таким образом

$$\dot{\bar{Z}}_{e,h} = \dot{Z}_{e,h} \cdot \bar{z}^0 = \dot{Z}(\xi, \eta, z) \cdot \bar{z}^0. \quad (3.29)$$

Тогда волновое уравнение будет иметь вид

$$\nabla^2 \dot{Z}(\xi, \eta, z) + k^2 \dot{Z}(\xi, \eta, z) = 0. \quad (3.30)$$

Используя метод Фурье (метод разделения переменных) представим

$$\dot{Z}(\xi, \eta, z) = \dot{\Psi}(\xi, \eta) \cdot \dot{g}(z) = \dot{\Psi} \cdot \dot{g}. \quad (3.31)$$

Оператор Лапласа ∇^2 можно представить в виде

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где ∇_{\perp}^2 – двумерный оператор Лапласа в координатах поперечного сечения линии передачи.

С учетом вышесказанного формулу (3.30) запишем в виде

$$(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \dot{\Psi} \cdot \dot{g} + k^2 \dot{\Psi} \cdot \dot{g} = 0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\dot{g} \cdot \nabla_{\perp}^2 \dot{\Psi} + \dot{\Psi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{g} + k^2 \dot{\Psi} \cdot \dot{g} = 0.$$

Разделим все слагаемые на $\dot{\Psi} \cdot \dot{g}$, тогда

$$-\frac{\nabla_{\perp}^2 \dot{\Psi}}{\dot{\Psi}} = \frac{1}{\dot{g}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{g} + k^2. \quad (3.32)$$

В выражении (3.32) левая часть зависит только от ξ , η , а правая – только от z . Так как ξ , η и z независимые переменные, то правая и левая части порознь равны одному и тому же постоянному числу, называемому собственным числом уравнения (3.32). Обозначим его κ (каппа).

Тогда уравнение (3.30) распадается на два ему эквивалентных

$$\nabla_{\text{T}}^2 \dot{\Psi} + \kappa^2 \dot{\Psi} = 0 ; \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{g}}{\partial z^2} - (\kappa^2 - k^2) \dot{g} = 0. \quad (3.34)$$

Выражение (3.33) – мембранное уравнение, описывающее распределение поля в поперечном сечении линии передачи.

Формула (3.34) – телеграфное уравнение, описывающее распределение поля и характер его распространения вдоль линии передачи (вдоль оси Oz).

Вычислим ротор электрического вектора Герца

$$\text{rot } \dot{\bar{Z}}_e = \text{rot} (\dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e \cdot \bar{z}^o) = \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e \cdot \text{rot } \bar{z}^o + [\text{grad} (\dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e), \bar{z}^o];$$

так как ротор любого орта равен нулю, а градиент представим через частные производные по координатам ξ , η , z , в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\bar{Z}}_e &= \left[\left(\bar{\xi}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \xi} + \bar{\eta}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \eta} + \bar{z}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial z} \right), \bar{z}^o \right] = \\ &= \left[\left(\bar{\xi}^o \times \bar{z}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \xi} + \bar{\eta}^o \times \bar{z}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \eta} + \bar{z}^o \times \bar{z}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \left[\left(-\bar{\eta}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \xi} + \bar{\xi}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial \eta} + 0 \cdot \frac{\partial \dot{\Psi}_e \cdot \dot{g}_e}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \dot{g}_e \left[\left(\bar{\xi}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \xi} + \bar{\eta}^o \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \eta} \right), \bar{z}^o \right] = \dot{g}_e [\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e, \bar{z}^o]. \end{aligned}$$

Далее вычислим ротор от полученного выражения

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } \dot{\bar{Z}}_e &= \text{rot} \left(-\bar{\eta}^o \cdot \dot{g}_e \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \xi} + \bar{\xi}^o \cdot \dot{g}_e \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \eta} \right) = \begin{vmatrix} \bar{\xi}^o & \bar{\eta}^o & \bar{z}^o \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{g}_e \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \xi} & \dot{g}_e \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \eta} & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 0 + \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \cdot \bar{\eta}^o - \dot{g}_e \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_e}{\partial \xi^2} \cdot \bar{z}^o - \dot{g}_e \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_e}{\partial \eta^2} \bar{z}^o - 0 + \frac{\partial \dot{\Psi}_e}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \cdot \bar{\xi}^o = \\
&= -\dot{g}_e \nabla_{\perp}^2 \dot{\Psi}_e \bar{z}^o + \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e = \kappa^2 \dot{g}_e \dot{\Psi}_e \bar{z}^o + \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e.
\end{aligned}$$

Подставив полученные формулы в выражения (3.27), можно получить следующие решения:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{E}}_e &= \kappa^2 \dot{g}_e \dot{\Psi}_e \cdot \bar{z}^o + \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e; \\
\dot{\bar{H}}_e &= j\omega \epsilon_a \dot{g}_e [\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e, \bar{z}^o].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Система уравнений (3.35) описывает поле типа "E" или "TM", а также при $\kappa^2 = 0$ получаем выражения

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{E}}_T &= \frac{\partial g_T}{\partial z} \nabla_{\perp} \dot{\Psi}_T; \\
\dot{\bar{H}}_T &= j\omega \epsilon_a g_T [\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_T, \bar{z}^o].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Система (3.36) – поле типа "T" или "TEM".

Аналогично, вычислив $\text{rot } \dot{\bar{Z}}_h$, $\text{rot rot } \dot{\bar{Z}}_h$ и подставив в выражения (3.28), получим

$$\begin{aligned}
\bar{\dot{E}}_h &= -j\omega \mu_a \dot{g}_h [\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_h, \bar{z}^o]; \\
\dot{\bar{H}}_h &= \kappa_h^2 \dot{g}_h \dot{\Psi}_h \bar{z}^o + \frac{\partial g_h}{\partial z} \nabla_{\perp} \dot{\Psi}_h.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Векторы в выражении (3.37) удовлетворяют полю типа "H" или "TE".

Функции $\dot{\Psi}_e, \dot{\Psi}_h, \dot{\Psi}_T$ должны удовлетворять граничным условиям на стенках волновода (на контуре L, образованном внутренней поверхностью стенок волновода в плоскости поперечного сечения). Вспомним, что $\sigma = \infty$, т.е. $E_T = 0$ и $H_n = 0$ тогда для полей типа "E" контуре L должны выполняться одновременно два условия

$$\kappa_e^2 \dot{g}_e \dot{\Psi}_e \cdot \bar{z}^0 = 0, \quad \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \nabla_T \dot{\Psi}_e \parallel \bar{n}^0,$$

откуда несложно получить, сократив на независимые от поперечных координат сомножители, следующие условия

$$\begin{aligned} \Psi_e &= 0 & \text{на контуре } L, \\ \psi_e &= C & \text{на контуре } L. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Нетрудно видеть, что первое из них является частным случаем второго. Для одновременного выполнения этих условий существует две возможности:

а) при $\kappa^2 \neq 0$ условия (3.38) выполняются одновременно при $\Psi_e = 0$ на контуре L ; это условие характерно для волн типа "Е";

б) при $\kappa^2 = 0$ одновременное выполнение их возможно, если $\psi_e = C$ на контуре L . Во втором случае это будет волна типа "Т" или "ТЕМ".

Аналогично для полей типа "Н" из второй формулы системы (3.37)

$$H_n = 0, \quad \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} = 0 \quad \text{на контуре } L. \quad (3.39)$$

Полей каждого типа в общем случае может быть множество, т.к. дифференциальное уравнение типа $\nabla^2 \Psi_{e,h} + \kappa^2 \Psi_{e,h} = 0$ имеет множество решений $[\Psi_{ei}, \Psi_{hi}]$ и множество соответствующих им собственных чисел κ_i , каждое из которых описывает стоячую волну в поперечном сечении линии передачи.

Решение телеграфного уравнения определим в виде

$$g(z) = A \cdot e^{-\gamma z} + B \cdot e^{\gamma z}, \quad (3.40)$$

где A, B – постоянные интегрирования;

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\kappa^2 - k^2}, \quad (3.41)$$

коэффициент распространения ЭМВ в ЛП.

Тогда выражения (3.35) или (3.36)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_{e,h} &= \bar{E}_{ne,h}(\xi, \eta) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + \bar{E}_{oe,h}(\xi, \eta) \cdot e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}; \\ \dot{\bar{H}}_{e,h} &= \bar{H}_{ne,h}(\xi, \eta) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + \bar{H}_{oe,h}(\xi, \eta) \cdot e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Условий для существования отраженной волны с неограниченно возрастающей амплитудой ($e^{\alpha z}$) в ЛП нет, поэтому

$$\bar{E}_{e,h}(z, t) = |\bar{E}_{ne,h}(\xi, \eta)| \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \Psi_n). \quad (3.43)$$

Возможны три случая:

а) $k > \kappa$; $\gamma = \sqrt{-(k^2 - \kappa^2)} = j\beta$;

$$\bar{E}_{e,h}(z, t) = |E_{ne,h}(\xi, \eta)| \cos(\omega t - \beta z + \Psi_{\Pi}) \quad (3.44)$$

незатухающая ЭМВ распространяющаяся вдоль "+" $|OZ|$. Для волн "Т" – $k > \kappa$ всегда.

б) $k < \kappa$; $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - k^2} = \alpha$; $\beta = 0$;

$$\bar{E}_{e,h}(z, t) = |E_{ne,h}(\xi, \eta)| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \Psi_{\Pi}), \quad (3.45)$$

нераспространяющаяся ЭМВ с уменьшающейся вдоль OZ амплитудой (местная);

в) $k = \kappa$; $\gamma = 0$; $\alpha = 0$; $\beta = 0$;

$$\bar{E}_{e,h}(z, t) = E_{ne,h}(\xi, \eta) \cdot \cos(\omega t + \Psi_{\Pi}), \quad (3.46)$$

нераспространяющаяся (местная) ЭМВ с постоянной амплитудой.

Определим основные характеристики и параметры ЭМВ в линиях передачи.

а) *Наименьшая частота (наибольшая длина волны), при которой возможно распространение ЭМВ данного типа называется критической.*

$$k = \kappa = k_{кр} .$$

$$\kappa_{e,h} = \omega_{кр,e,h} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \Rightarrow \omega_{кр,e,h} = \frac{\kappa_{e,h}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} ; \quad (3.47)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\kappa_{e,h}} . \quad (3.48)$$

Для распространяющихся полей (рисунки 3.7, 3.8)

$$\omega > \omega_{кр}; \quad \lambda < \lambda_{кр} . \quad (3.49)$$

Для нераспространяющихся полей (рисунки 3.7, 3.8)

$$\omega < \omega_{кр}; \quad \lambda > \lambda_{кр} . \quad (3.50)$$

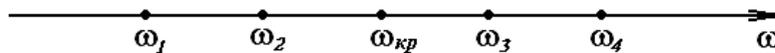


Рисунок 3.7 – Соотношения частот для распространяющихся и нераспространяющихся полей

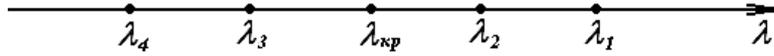


Рисунок 3.8 – Соотношения длин волн для распространяющихся и нераспространяющихся полей

При любой заданной частоте существует конечное число распространяющихся типов волн, кроме того существуют частоты (длины волн) генератора, для которых в линии передачи возможно существование единственной волны ($\omega_1(\lambda_1)$). Волна имеющая наименьшую (наибольшую) критическую частоту (длину волны) называется *волной основного типа* (основной волной). Другие волны называются *высшими*. Для волн типа "Т" $\lambda_{кр} = \infty$ ($\omega_{кр}=0$), следовательно, если таковая может существовать в ЛП, то она всегда основная.

Длина волны в линии передачи отличается от длины волны в свободном пространстве и равна

$$\Lambda_{e,h} = \frac{2\pi}{\beta_{e,h}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa_{e,h}^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр,e,h}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр,e,h}}\right)^2}}, \quad (3.51)$$

где λ – длина волны в свободном пространстве. Выражение (3.51) показывает, что длина волны определяется не только параметрами среды, но и размерами и формой поперечного сечения волновода.

Для волн типов "Е" и "Н" $\lambda < \lambda_{кр,e,h} \Rightarrow \Lambda_{e,h} > \lambda$, для волн типа "Т" – $\Lambda_T = \lambda$.

б) Для волн, распространяющихся в гладких волноводах, скорость распространения теряет однозначный смысл, поэтому вводят понятия так называемых фазовой и групповой скоростей.

Фазовой скоростью волны в волноводе называется скорость распространения фазового фронта вдоль линии передачи (вдоль Oz)

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{\omega}{k\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (3.52)$$

Для волн типов "Е" и "Н" $\lambda < \lambda_{кр} \Rightarrow V_{\phi,e,h} > c$, для волн типа "Т" $\lambda_{кр} = \infty; \quad V_\phi = c$.

Групповой называется скорость переноса ЭМЭ.

$$V_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{2\sqrt{k^2 - \kappa^2}}{2k\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}; \quad (3.53)$$

как видно из формул (3.52, 3.53) между фазовой, групповой и скоростью света существует связь

$$V_{гр} \cdot V_{ф} = c^2.$$

в) *Поперечным характеристическим (волновым) сопротивлением* ЛП называется отношение поперечных составляющих векторов поля.

$$Z_{\perp} = \frac{\bar{E}_{\perp}}{\bar{H}_{\perp}}. \quad (3.54)$$

Если подставить в выражение (3.54) значение поперечных составляющих векторов из формул (3.35) – (3.37), то получим

$$Z_e^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}; \quad (3.55)$$

$$Z_h^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}; \quad (3.56)$$

$$Z_T^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (3.57)$$

Знак "+" соответствует падающей волне, "-" – отраженной.

Следует иметь в виду, что Z_{\perp} характеризует не потери в линии передачи, а взаимное соотношение поперечных составляющих векторов поля (их амплитуд и фаз).

д) Средняя за период мощность, которая переносится через поперечное сечение ЛП

$$P_{ср\perp} = \frac{1}{2} Z_{\perp} \int_{S_{\perp}} |H_{\perp}|^2 dS_{\perp} = \frac{1}{2Z_{\perp}} \int_{S_{\perp}} |E_{\perp}|^2 dS_{\perp}. \quad (3.58)$$

Формула (3.58) указывает общий подход для вычисления допустимой мощности, которую может передать волновод через свое поперечное сечение. Ее необходимо конкретизировать в каждом случае, вычисляя интеграл от квадрата напряженности поля по площади поперечного сечения волновода.

3.2.3 Основная волна в прямоугольном волноводе и ее характеристики

В практике передачи СВЧ энергии от источников (генераторов) к различным потребителям (нагрузкам) наибольшее применение нашли прямоугольные волноводы (ПВВ). Прямоугольным волноводом называется линия передачи,

имеющая в поперечном сечении одну проводящую замкнутую поверхность с сечением в виде прямоугольника.

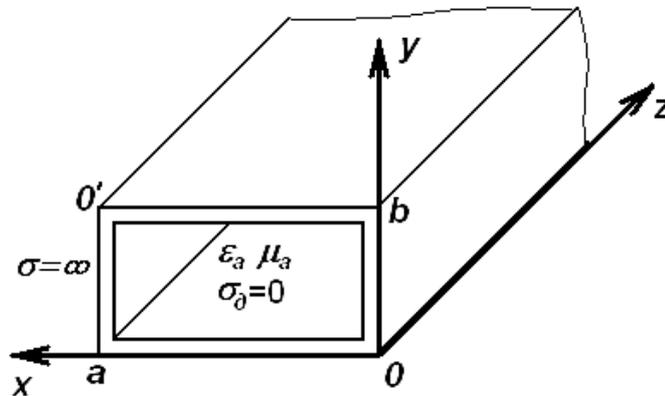


Рисунок 3.9 – Прямоугольный волновод

Решим мембранное уравнение (3.33) методом разделения переменных при заданных граничных условиях ($E_{\tau} = 0$; $H_n = 0$) на контуре L ($0a0'b$).

Представим функцию $\Psi(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, тогда

$$\frac{\partial^2 X(x)}{X(x) \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y(y)}{Y(y) \partial y^2} = -\kappa^2. \quad (3.59)$$

Поскольку слагаемые являются функциями независимых координат x и y , то каждое из них равно некоторой константе, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k_y^2 Y(y) &= 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где

$$k_x^2 + k_y^2 = \kappa^2. \quad (3.61)$$

Общими решениями (3.60) являются

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x, \\ Y(y) &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные интегрирования.

Для определения частных решений уравнения (3.62) воспользуемся граничными условиями: для E -поля $\Psi_e = 0$ на контуре L , для H -поля $-\frac{\partial \Psi_h}{\partial n} = 0$ на контуре L .

Для полей типа Е граничные условия запишутся

$$\begin{aligned}\psi_e(x, y)|_{x=0} &= X(0) \cdot Y(y) = 0; \\ \psi_e(x, y)|_{x=a} &= X(a) \cdot Y(y) = 0; \\ \psi_e(x, y)|_{y=0} &= X(x) \cdot Y(0) = 0; \\ \psi_e(x, y)|_{y=b} &= X(x) \cdot Y(b) = 0.\end{aligned}\tag{3.63}$$

Поскольку $X(x) \neq 0$, $Y(y) \neq 0$, то сократив на них, получим

$$\begin{aligned}X(0) &= 0; \\ X(a) &= 0; \\ Y(0) &= 0; \\ Y(b) &= 0.\end{aligned}\tag{3.64}$$

При подстановке в уравнение (3.62) $x = 0$ следует, что $A_1 = 0$, а при подстановке $x = a$ и $A_1 = 0$ следует

$$\begin{aligned}X(a) &= A_2 \sin k_x a = 0 \Rightarrow \sin k_x a = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_x a &= m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots) \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a},\end{aligned}\tag{3.65}$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

В формуле (3.65) следует ограничиться только положительными m , так как отрицательные новых решений не дают, а только изменяют знак констант на противоположный.

Аналогично при подстановке в (3.62) $y = 0$ и $y = b$ получим, что $B_1 = 0$, а

$$k_y = \frac{n\pi}{b},\tag{3.66}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Физически (3.65) и (3.66) означают, что в замкнутых односвязных линиях передачи в поперечном сечении устанавливается стоячая волна с узлами электрического и пучностями магнитного поля вблизи поверхности проводника (согласно граничных условий).

С учетом (3.64), (3.65), (3.66)

$$\psi_e(x, y) = X(x)Y(y) = A_2 B_2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y = C \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y.\tag{3.67}$$

Поскольку при $m = 0$, $n = 0$ и при $m = n = 0$ поле тождественно равно нулю, то такие значения необходимо исключить, т.е. для полей типа "Е" m и n могут быть любыми положительными целыми числами, кроме нуля.

Для полей типа "Н" из (3.64) и граничного условия $\frac{\partial \Psi_h}{\partial n} = 0$ на контуре L следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} \right|_{x=0} &= 0; & \left. \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} \right|_{x=a} &= 0; \\ \left. \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} \right|_{y=0} &= 0; & \left. \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} \right|_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

Из решений (3.62) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_h}{\partial n} &= \frac{\partial X(x)Y(y)}{\partial n} = \frac{dX(x)}{dx} \frac{dY(y)}{dy} = \\ &= (A_1 k_x \sin k_x x - A_2 k_x \cos k_x x)(B_1 k_y \sin k_y y - B_2 k_y \cos k_y y); \end{aligned}$$

откуда по необходимости $A_2 = 0$ при $x = 0$ и $B_2 = 0$ при $y = 0$; обозначив $C = A_1 B_1$, окончательно получится

$$\Psi_h(x, y) = C \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y. \quad (3.68)$$

Поскольку $\Psi_h = C$ при $m = n = 0$ на всей плоскости поперечного сечения, то совместное равенство m и n нулю необходимо исключить, т.е. отдельно $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, но $m = n = 0$ исключается.

Подставив выражения (3.67) и (3.68) в уравнения (3.35) и (3.37) и вычислив частные производные в прямоугольной системе координат, получим соотношения

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ex} &= \frac{\partial g_e}{\partial z} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{ey} &= \frac{\partial g_e}{\partial z} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{ez} &= \kappa_e^2 \cdot g_e \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{ex} &= j\omega \epsilon_a \cdot g_e \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{ey} &= -j\omega \epsilon_a \cdot g_e \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{ez} &= 0; \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{hx} &= j\omega\mu_a \cdot g_h \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \\
\dot{E}_{hy} &= -j\omega\mu_a \cdot g_h \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y; \\
\dot{E}_{hz} &= 0; \\
\dot{H}_{hx} &= -\frac{\partial g_h}{\partial z} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y; \\
\dot{H}_{hy} &= -\frac{\partial g_h}{\partial z} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \\
\dot{H}_{hz} &= \kappa_h^2 \cdot g_h \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

В выражениях (3.69) и (3.70), используя формулу (3.61)

$$\begin{aligned}
\frac{m\pi}{a} &= k_x, \quad \frac{n\pi}{b} = k_y, \\
\kappa_{e,h} &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

В продольном направлении структура описывается телеграфным уравнением, физический смысл которого заключается в том, что вдоль стенок волновода устанавливается интерференционное поле падающих и отраженных волн, распространяющееся вдоль волновода с некоторой скоростью V_ϕ , определяемой не только параметрами среды, заполняющей волновод, но и поперечными размерами волновода и типом волны в нем.

Из формул (3.40), (3.41)

$$g_{e,h}(z) = A \cdot e^{-\gamma_{eh} \cdot z}, \tag{3.72}$$

где $\gamma_{e,h} = \sqrt{\kappa_{e,h}^2 - k^2}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

В соответствии с выражением (3.51)

$$\lambda_{крe,h} = \frac{2\pi}{\kappa_{e,h}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \tag{3.73}$$

Вдоль оси z пространственная структура описывается длиной волны Λ_B , которая больше длины волны в безграничной среде λ

$$\Lambda_B = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (3.74)$$

Таким образом, из вышесказанного можно сформулировать общие свойства ЭМВ в прямоугольных волноводах:

а) В прямоугольном волноводе может существовать бесконечное число волн "Е" и "Н" – типов. Волны типа "Т" существовать не могут, т.к. $\psi_T=0$ на контуре, образованном поперечным сечением волновода L.

б) В прямоугольном волноводе индексы m и n в обозначении типа волны E_{mn} , H_{mn} физически означают число стоячих полуволн поля вдоль координатных осей OX (широкой стенки) и OY (узкой стенки) соответственно поперечного сечения.

в) Для полей типа "Е" в прямоугольном волноводе индексы m и n не могут равняться нулю ($\psi_e=0$ или $E_t=0$). Для полей типа "Н" один из индексов m или n должен иметь ненулевое значение ($\frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0$ или $H_n=0$).

д) Собственные числа и критические длины волн определяются поперечными размерами волновода и зависят от типа волны.

Напомним, что основной волной называется волна имеющая наименьшую $\omega_{кр}$ (наибольшую $\lambda_{кр}$). Критическая длина волны $\lambda_{кр}$ максимальна при минимальных m и n, то есть для простейших типов волн. Из волн типа "Н" минимальные m и n для волн H_{10} , H_{01} , из волн типа "Е" минимальные m и n для волны E_{11} .

Сравним критические длины для этих волн

$$\lambda_{кр}^{H_{10}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2}} = 2a; \quad (3.75)$$

$$\lambda_{кр}^{H_{01}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 2b < 2a; \quad (3.76)$$

$$\lambda_{кр}^{E_{11}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2a \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} < 2a; \quad (3.77)$$

откуда делаем вывод, что основной волной в ПВВ является волна H_{10} (рисунок 3.10).

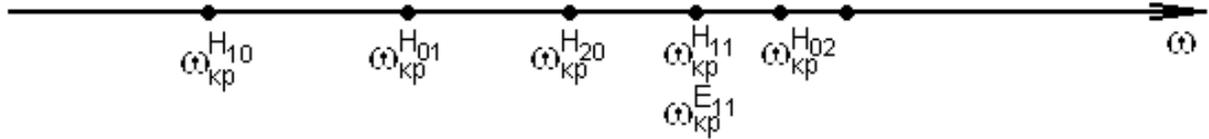


Рисунок 3.10 – Распределение критических частот волн различных типов в прямоугольном волноводе

Определим основные характеристики и параметры волны H_{10} :

а) фазовая скорость

$$V_{\phi}^{H_{10}} = \frac{\omega}{\beta_{H_{10}}} = \frac{C}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} = \frac{C}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} < V_{\phi}^{H, E_{mn}}; \quad (3.78)$$

б) групповая скорость

$$V_{гр}^{H_{10}} = C\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2} = C\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} > V_{гр}^{H_{mn}, E_{mn}}. \quad (3.79)$$

При $\lambda \rightarrow 2a$ фазовая скорость возрастает ($V_{\phi} \uparrow$); групповая уменьшается ($V_{гр} \downarrow$) и при $\lambda = 2a$ $V_{\phi} = \infty$; $V_{гр} = 0$, т.е. волна вдоль оси z не распространяется. В соответствии с выражением (3.41) это местная незатухающая (при отсутствии потерь) волна;

в) поперечное характеристическое сопротивление волновода с волной H_{10}

$$Z_1 = Z_{H_{10}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} > \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \quad (3.80)$$

т.е. в ПВВ с H_{10} большая часть энергии ЭМП приходится на электрическую составляющую поля, чем в неограниченном диэлектрике;

д) мощность, переносимая волной через поперечное сечение волновода с H_{10} определяется по формуле (3.58)

$$E_{\perp} = E_{H_{10}} = E_{hy} = E_m \sin \frac{\pi}{a} x; \quad S_{\perp} = a \times b;$$

$$P_{cp\perp} = \frac{1}{2Z_{H10}} \int_{S_{\perp}} E_{\perp}^2 dS = \frac{1}{2Z_{H10}} \int_0^a \int_0^b E_{\perp}^2 dx dy = \frac{E_{\max}^2}{480\pi} ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \quad (3.81)$$

е) ЭМВ в волноводах затухают иначе, чем в неограниченных средах. Потери энергии в общем случае складываются из потерь в металлических стенках волновода (α_m) и потерь в диэлектрике (α_d), заполняющем волновод, причем $\alpha_m \gg \alpha_d$.

Токи проводимости наводятся на внутренних стенках волновода и имеют сложную структуру, повторяющую структуру ЭМВ в волноводе. При этом выполняется уравнение непрерывности: линии тока проводимости протекают между точками на поверхности волновода, где начинаются и заканчиваются силовые линии тока смещения, повторяющего закон изменения электрического поля (отстающий от вектора E на четверть периода или четверть длины волны).

Потери в металле определяются интенсивностью токов проводимости на внутренней поверхности волновода, которые можно выразить через касательную составляющую вектора \vec{H}

$$\alpha_m = \frac{\oint_L |H_{\tau}|^2 d\ell}{\oint_{S_{\perp}} |H_{\perp}|^2 dS_{\perp}} = \frac{R_s}{2Z_{\perp}},$$

где R_s – активное поверхностное сопротивление металлических стенок; Z_{\perp} – поперечное характеристическое (волновое) сопротивление волновода; H_{τ} – продольная составляющая магнитного поля в волноводе; H_{\perp} – поперечная составляющая магнитного поля в волноводе.

После подстановки в предыдущую формулу Z_{\perp}

$$\alpha_m = \frac{0,129^{-3/2} \left[\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \right]}{\sqrt{\sigma_m} \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (3.82)$$

ж) структура волны H_{10} (распределение силовых линий векторов поля в объеме) в прямоугольном волноводе показана на рисунке 3.11.

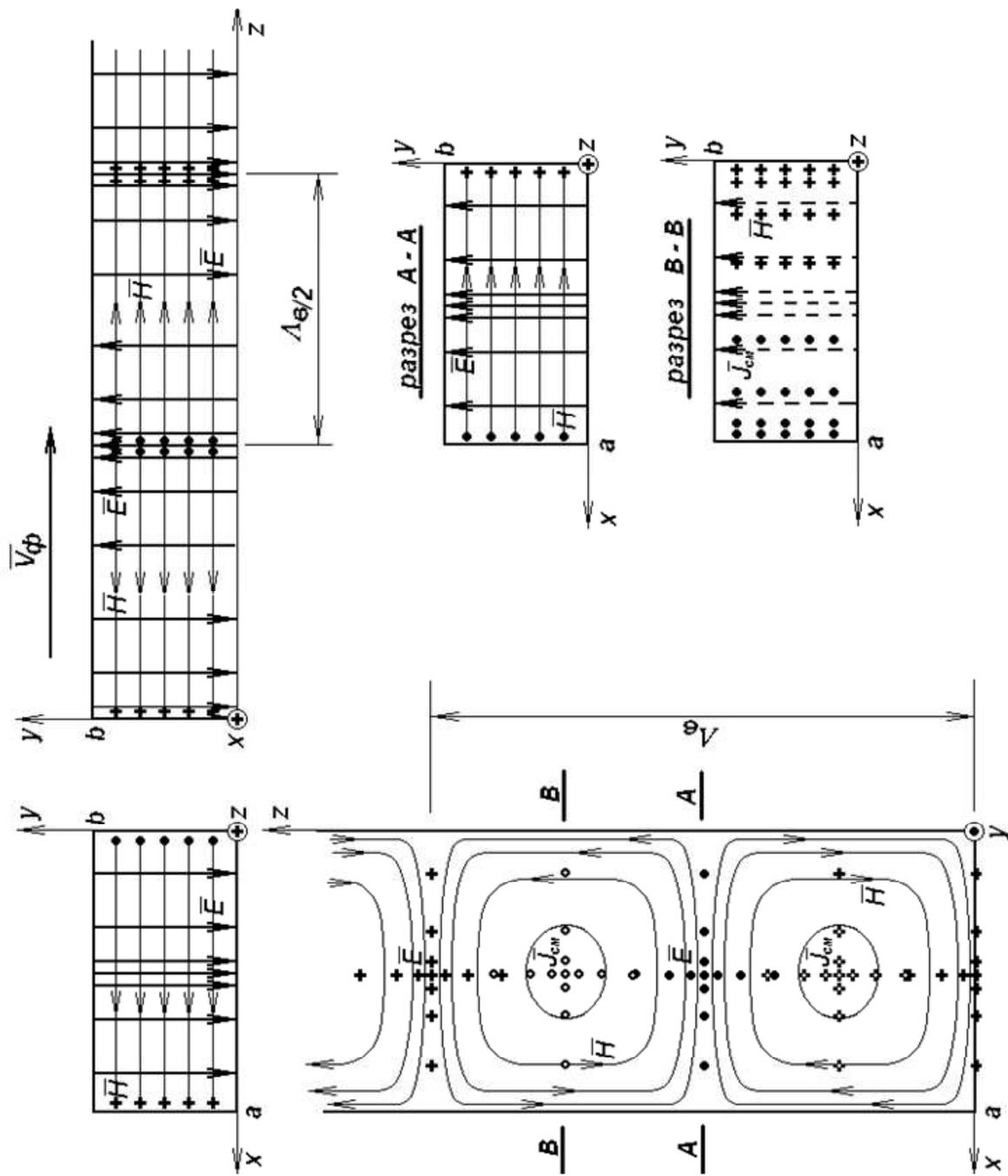


Рисунок 3.11 – Структура волны H_{10} в прямоугольном волноводе

3.2.4 Волны высших типов в прямоугольных волноводах

Все волны, у которых критическая длина волны меньше (критическая частота больше) чем у основной, называются *высшими типами волн*. Обозначаются E_{mn} (H_{mn}). Волны, у которых индексы m и n не превышают единицу, называются простейшими; в прямоугольном волноводе это H_{10} , H_{01} , H_{11} , E_{11} .

Волны высших порядков имеют особенности:

- а) более сложные структуры полей с увеличением m и n ;
- б) фазовая скорость возрастает, групповая уменьшается;
- в) длина волны в линии передачи увеличивается;
- д) модуль характеристического (волнового) сопротивления линии передачи возрастает для волн типа – "Н" и уменьшается для волн типа – "Е";
- ж) средняя мощность, переносимая за период через поперечное сечение волновода уменьшается, а потери энергии – возрастают.

Если в волноводе выполняются условия распространения для волны высшего типа, то существуют (распространяются) и все волны низших типов.

При одновременном распространении в волноводе нескольких типов волн, как следует из формул (3.52, 3.53) групповые и фазовые скорости волн различных типов различны (исключение составляют типы волн "Е" и "Н" с одинаковыми индексами m и n .) В результате этого в процессе распространения происходит интерференция волн различного типа в месте приема и искажение спектрального состава передаваемого сигнала. Вообще говоря, это явление нежелательно, однако, для создания специфических устройств СВЧ оно широко используется (волноводно-щелевой мост, фазовый циркулятор и др.).

Для неискаженной передачи информации необходимо обеспечивать единственность распространения по волноводу требуемого типа волны. Для волны основного типа это производят выбором поперечных размеров волновода и рабочей длины волны генератора, так чтобы выполнялись условия $\lambda_r < \lambda_{кр}$ для основной волны и $\lambda_r > \lambda_{кр}$ для волн высших типов. Кроме того, некоторые различные типы волн отличаются пространственной ориентацией векторов поля (поляризацией), поэтому возможно осуществлять селекцию их конструктивными особенностями устройства возбуждения. Наиболее распространены способы возбуждения волноводов: с помощью штыря (тонкого проводника с ВЧ током), помещаемого в сечении, где находится максимум силовых линий электрического поля параллельно последним; с помощью петли (магнитной рамки), помещаемой в максимуме силовых линий магнитного поля, так чтобы они пересекали плоскость рамки. Часто встречается возбуждение волноводов с помощью отверстий связи, которые прорезаются таким образом, чтобы они пересекали линии поверхностного тока проводимости, протекающего по внутренней поверхности волновода.

Наиболее часто используемыми высшими типами волн в прямоугольных волноводах являются волны H_{20} , H_{11} и E_{11} , структуры которых изображены на рисунках 3.12, 3.13 и 3.14 соответственно.

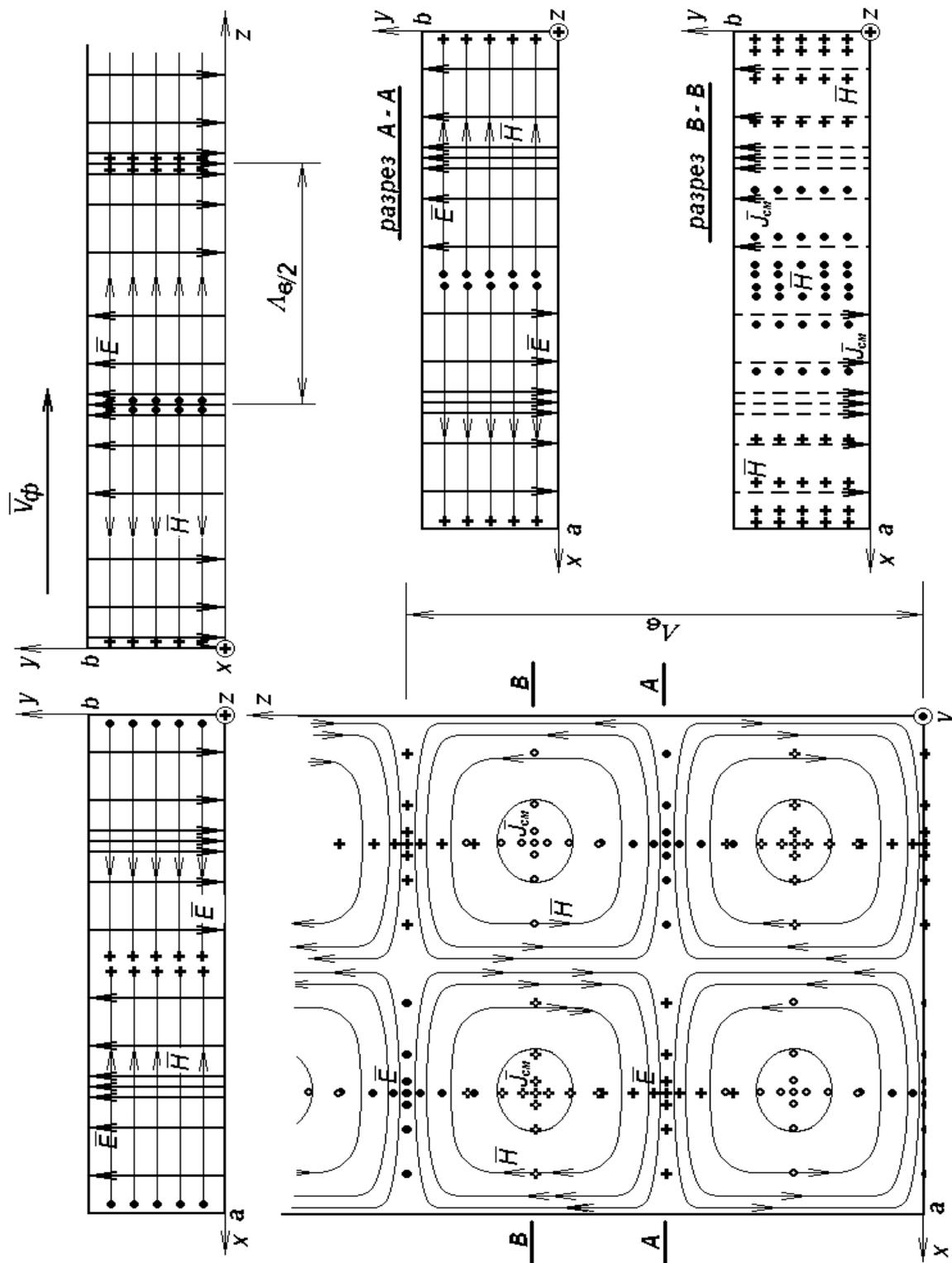


Рисунок 3.12 – Структура волны H_{20}

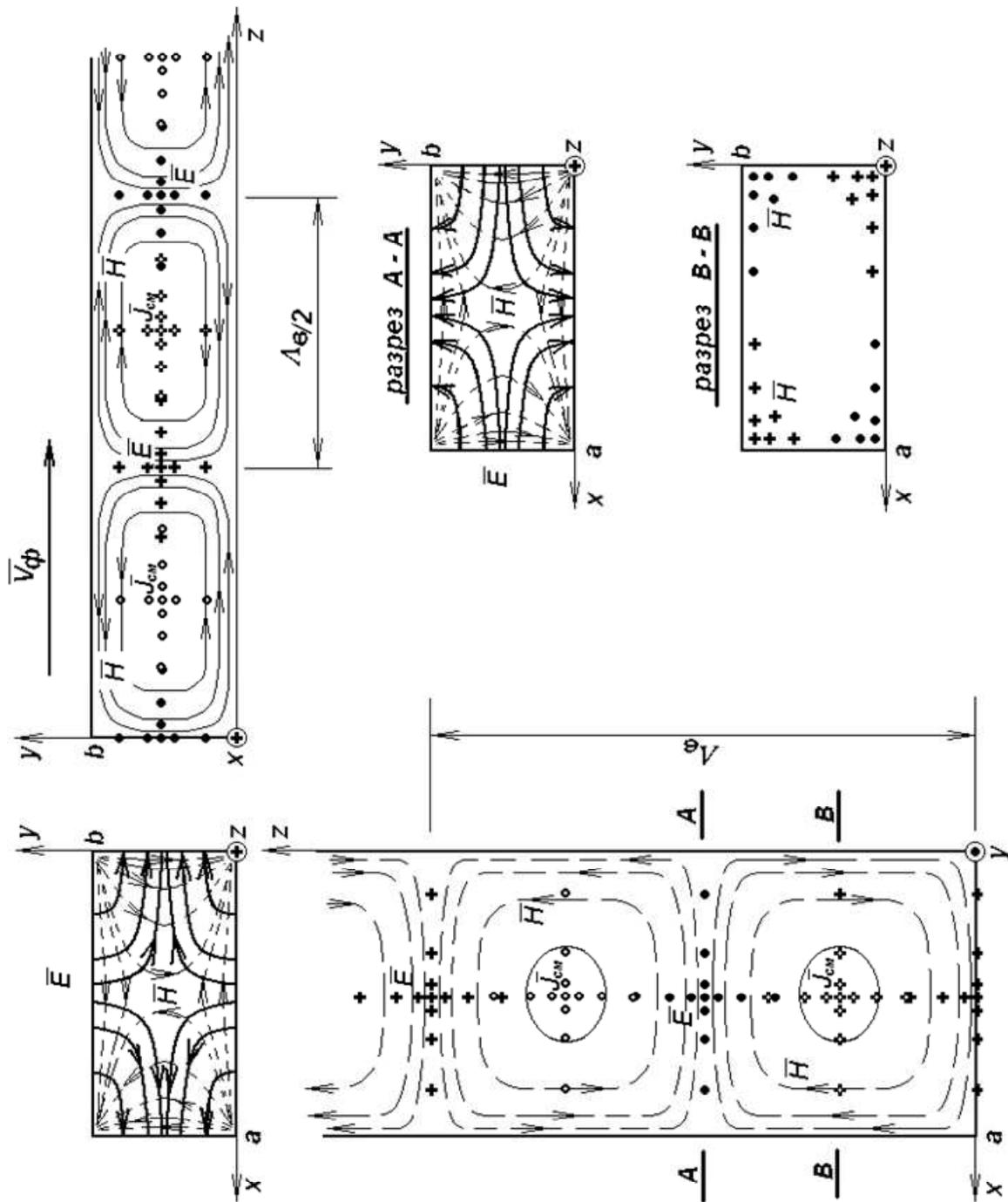
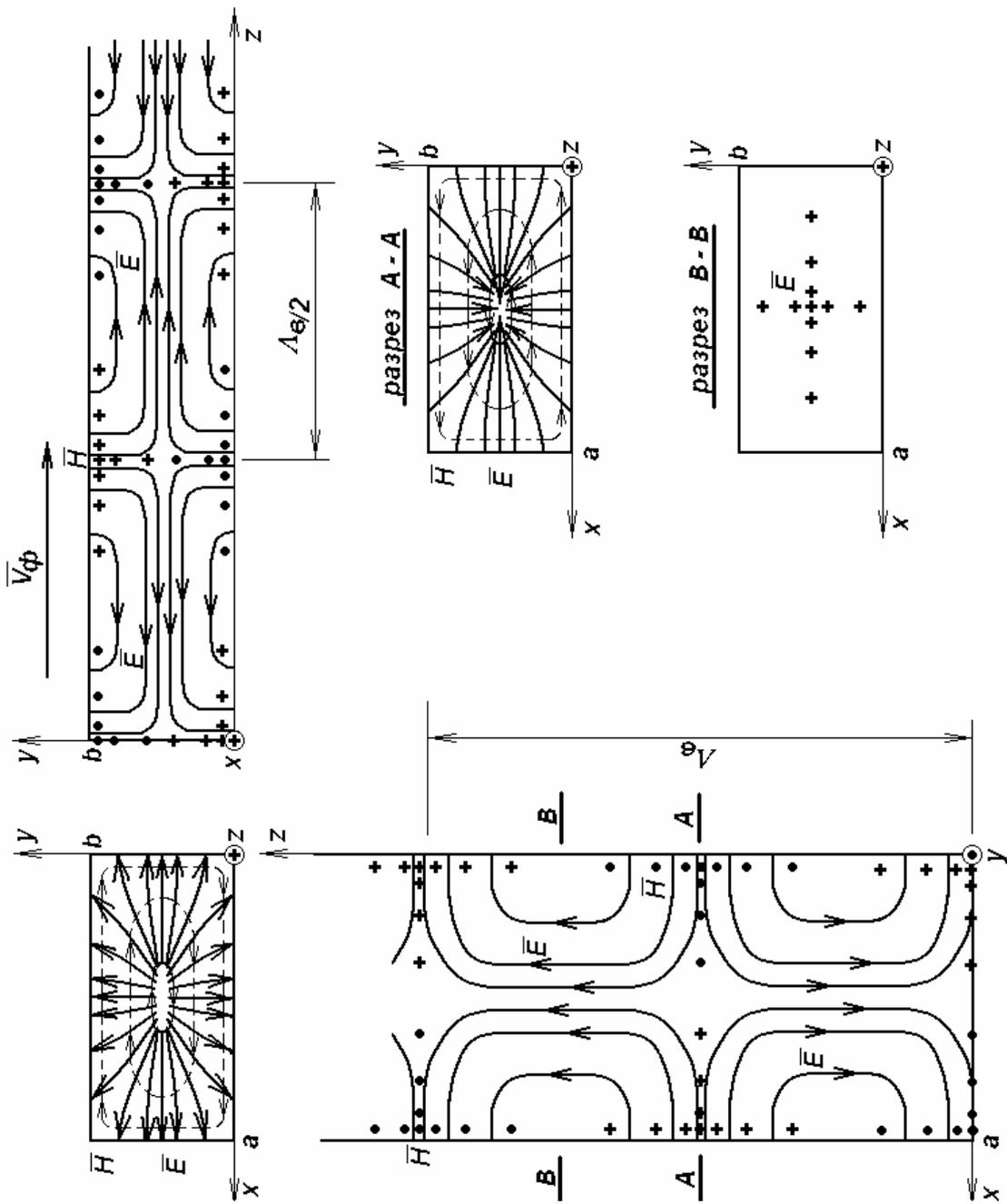


Рисунок 3.13 – Структура волны H_{11} .



3.14 – Структура волны E_{11} .

Если требуется использовать передачу энергии СВЧ (сигналов) на волне высшего типа, то используют фильтры типов волн, подавляющие волны низших типов по сравнению с используемым. Фильтры типов волн представляют собой короткозамкнутые на проводящую поверхность проводники, которые имеют такую форму, чтобы вектор напряженности электрического поля подавляемой волны наводил в них интенсивные токи (был бы им параллелен), а вектор напряженности электрического поля пропускаемой волны был бы им перпендикулярен.

Волны H_{20} и H_{01} используются для создания волноводных мостов щелевого типа, а волны H_{11} и E_{11} применяются в многомодовых облучателях.

Особенности структур волн высших типов используются для создания антенн в виде открытых концов волноводов и возбуждателей антенн бегущей волны со специальными свойствами.

3.2.5 Круглый волновод. Основная волна в КВ и ее характеристики

В технике СВЧ наряду с прямоугольными нашли применение также и круглые волноводы, которые имеют по сравнению с первыми некоторые важные особые свойства. Круглым волноводом называют односвязную регулярную линию передачи с поперечным сечением круглой формы, отрезок которой показан на рисунке 3.15.

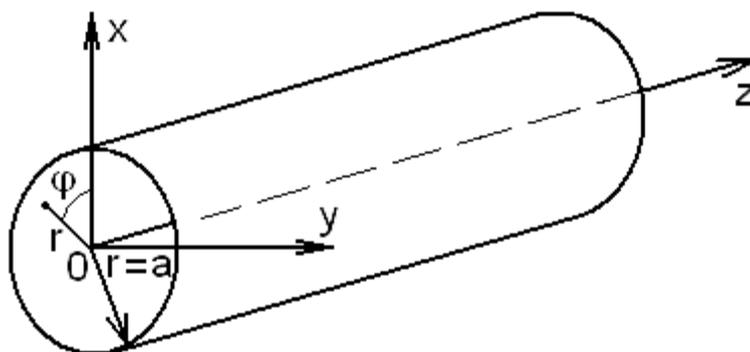


Рисунок 3.15– Круглый волновод

Для определения типов полей в КВ решим мембранное уравнение (3.33) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) для функции $\psi(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) = R \cdot \Phi$ ввиду независимости переменных r и φ .

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.83)$$

Для решения уравнения (3.83) целесообразно воспользоваться методом Фурье (методом разделения переменных).

После разделения уравнений получаем систему

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0 ; \quad (3.84)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + (\kappa^2 r^2 - m^2) R = 0 . \quad (3.85)$$

Общие решения отыщем в виде:
из формулы (3.84)

$$\Phi(\varphi) = C \cdot \cos(m\varphi + \varphi_0) ; \quad (3.86)$$

из формулы (3.85)

$$R(r) = A_1 J_m(\kappa r) + B_1 N_m(\kappa r) . \quad (3.87)$$

В выражениях (3.86), (3.87) C , A_1 , B_1 – постоянные интегрирования, $m = 0, 1, 2, 3 \dots$; $J_m(\kappa r)$ – функция Бесселя 1-го рода m – го порядка от аргумента κr ; $N_m(\kappa r)$ – функция Бесселя 2-го рода m – го порядка (функция Неймана) от аргумента κr , которые показаны на рисунке 3.16. Свойства этих функций хорошо изучены в математике, они табулированы и используются во многих физических приложениях. Эти функции являются осциллирующими, но не гармоническими: с ростом аргумента уменьшается размах осцилляций и увеличивается их период.

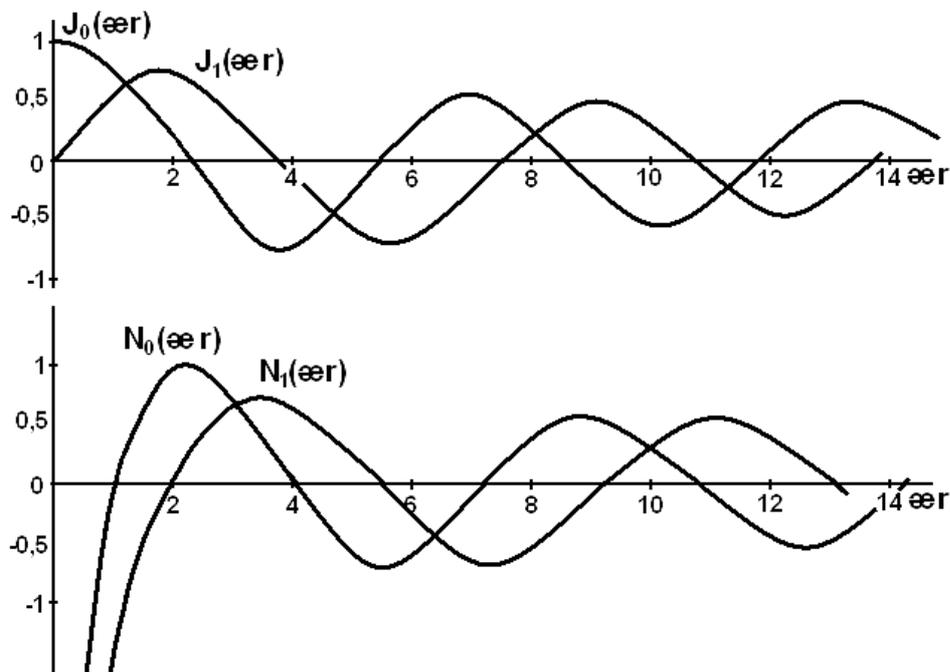


Рисунок 3.16 – Функции Бесселя

При $r \rightarrow 0$ $N_m(\kappa r) \rightarrow -\infty$, а так как поле в круглом волноводе не может быть бесконечным, то $B_1 = 0$. Тогда

$$R(r) = A_1 J_m(\kappa r). \quad (3.87)$$

Общее решение мембранного уравнения в круглом волноводе

$$\psi(r, \varphi) = A \cdot J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \varphi_0). \quad (3.88)$$

Как и прямоугольный круглый волновод односвязная линия передачи, поэтому $\psi_T = 0$ всюду на стенках, следовательно полей типа "Т" в круглом волноводе не существует. Для определения решений для полей "Е" и "Н" подчиним уравнение (3.88) граничным условиям

$$\psi_e(r, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi_n(r, \varphi)}{\partial r} = 0$$

на контуре L , т.е. при $r = a$.

Из выражения (3.88) $\Rightarrow J_m(\kappa r) = 0 / r = a$, где $\kappa_e a = \alpha_{mn}$ - n -ый корень (не считая нулевого) функции Бесселя m -го порядка ($n = 1, 2, 3, \dots$), тогда

$$\kappa_e = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad (3.89)$$

а формула (3.88) запишется

$$\psi_e(r, \varphi) = A J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \quad (3.90)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Несколько первых корней функций Бесселя показаны в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Корни функции Бесселя

m	Номер корня (n)			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Аналогично при $r = a$ $\psi'(a, \varphi) = 0$ $J'_m(\kappa_h a) = 0$, где $\kappa_h a = \beta_{mn}$ - n -ый корень (не считая нулевого) производной функции Бесселя m -го порядка,

$$\kappa_h = \frac{\beta_{mn}}{a}. \quad (3.91)$$

$$\psi_h(r, \varphi) = A J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \quad (3.92)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$. Несколько первых корней производных функций Бесселя первого рода показаны в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Корни производной функции Бесселя

m	Номер корня (n)			
	1	2	3	4
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,332	8,536	11,706
2	3,054	6,705	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	

При подстановке выражений (3.89) и (3.92) в формулу (3.35) получим поле типа "E"

$$\begin{aligned} \dot{E}_{er} &= \frac{\partial g_e}{\partial z} \frac{\alpha_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{E}_{e\varphi} &= -\frac{\partial g_e}{\partial z} \cdot \frac{m}{r} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{E}_{ez} &= \kappa_e^2 g_e J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{H}_{er} &= -j\omega \epsilon_a g_e \frac{m}{r} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{H}_{e\varphi} &= -j\omega \epsilon_a g_e \frac{\alpha_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{H}_{ez} &= 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

а в формулу (3.36) поле "H"

$$\begin{aligned} \dot{E}_{hr} &= j\omega \mu_a g_h \frac{m}{r} J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{E}_{h\varphi} &= j\omega \mu_a g_h \frac{\beta_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{E}_{hz} &= 0, \\ \dot{H}_{hr} &= \frac{\partial g_h}{\partial z} \cdot \frac{\beta_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{H}_{h\varphi} &= -\frac{\partial g_h}{\partial z} \cdot \frac{m}{r} J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0), \\ \dot{H}_{hz} &= \kappa_e^2 g_h J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Из формул (3.89) и (3.91)

$$\lambda_{\text{крЕ}} = \frac{2\pi}{\kappa_e} = \frac{2\pi a}{\alpha_{mn}}, \quad (3.95)$$

$$\lambda_{\text{крН}} = \frac{2\pi}{\kappa_h} = \frac{2\pi a}{\beta_{mn}}. \quad (3.96)$$

Индекс m означает порядковый номер функции Бесселя для волн типа "Е" или ее первой производной для волн типа "Н", в соответствии с которой компоненты поля распределяются вдоль радиуса z , а также количество полных периодов изменения $\cos(m\varphi)$ вдоль окружности с радиусом $r = \text{const}$.

Индекс n означает порядковый номер корня (не считая нулевого) функции Бесселя первого рода ("Е" – поле) или ее первой производной ("Н" – поле) m – го порядка, а также число полувариаций изменения поля по закону функции J_m или J_m' , которое укладывается на радиусе $r = a$.

Из таблиц 3.1 и 3.2 и формул (3.95), (3.96) следует, что основной волной в круглом волноводе будет волна H_{11} с критической длиной волны

$$\lambda_{\text{кр}H_{11}} = \frac{2\pi a}{1,841} = 3,41a = \lambda_{\text{кр max}}. \quad (3.97)$$

Ближайшая к ней волна E_{01} с критической длиной волны

$$\lambda_{\text{кр}E_{01}} = \frac{2\pi a}{2,405} = 2,61a.$$

Тогда условие единственности волны H_{11} в круглом волноводе запишется в виде

$$2,61a < \lambda < 3,41a. \quad (3.98)$$

Для основной волны получим следующие важные параметры:
фазовая скорость

$$V_{\phi}^{H_{11}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/3,41a)^2}}; \quad (3.99)$$

групповая скорость

$$V_{\text{гр}}^{H_{11}} = c \cdot \sqrt{1 - (\lambda/3,41a)^2}; \quad (3.100)$$

длина волны в волноводе

$$\Lambda_{H_{11}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/3,41a)^2}}. \quad (3.101)$$

В соответствии с выражениями (3.94) при $m = 1$ и $n = 1$ получим законы изменения составляющих вдоль радиуса и вдоль окружности волновода, а, затем, восстановим структуру силовых линий тока смещения и охватывающих его согласно первому закону Максвелла силовых линий магнитного поля, как изображено на рисунке 3.17.

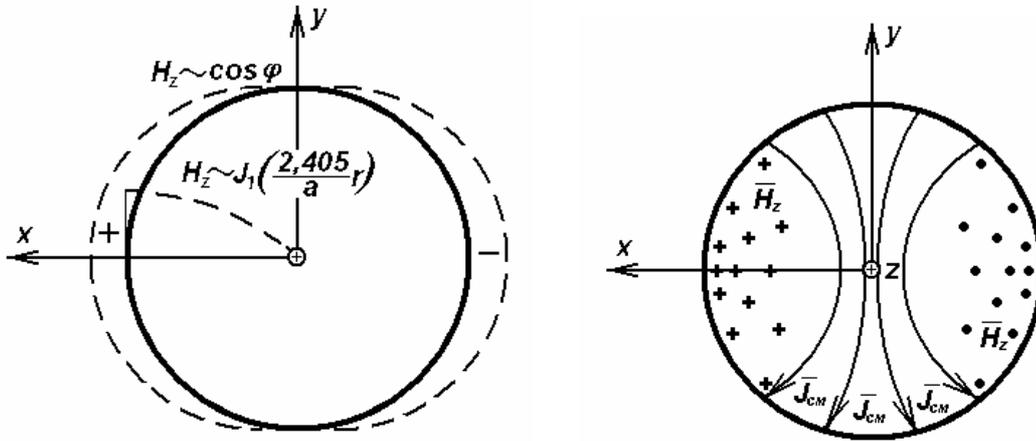


Рисунок 3.17 – Закон распределения продольной составляющей H_z и структура тока смещения и продольной составляющей в поперечном сечении круглого волновода

Структура поля волны H_{11} в круглом волноводе, показанная на рисунке 3.18, напоминает структуру H_{10} в прямоугольном волноводе, потому их очень легко трансформировать друг в друга плавно изменяя поперечное сечение волновода.

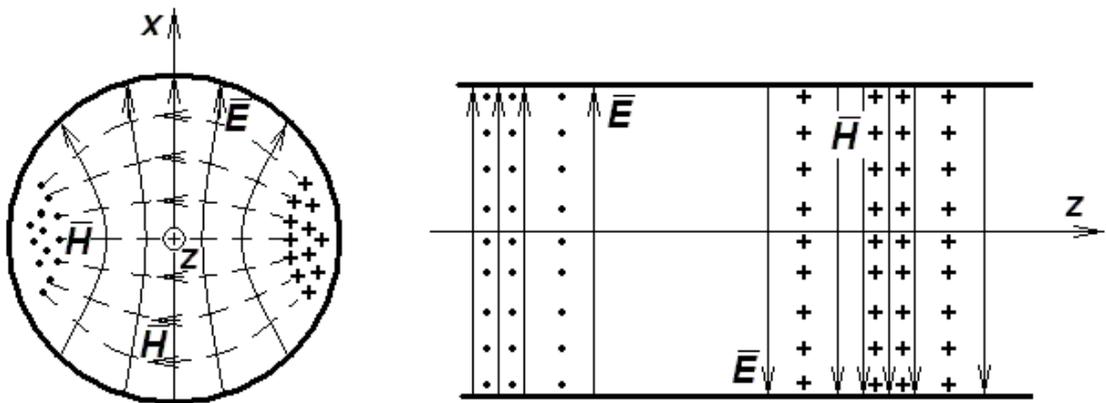


Рисунок 3.18 – Структура волны H_{11} в круглом волноводе

3.2.6 Волны высших типов в круглом волноводе

Для определения структуры поля E_{01} воспользуемся продольной составляющей E_{ez} , которую определим из (3.93) при $m = 0$, $n = 1$, $\varphi_0 = 0$

$$E_{ez} = A \kappa_e^2 \cdot g_e \cdot J_0\left(\frac{2,405}{a} r\right). \quad (3.102)$$

Особенности структуры поля E_{01} следующие.

а) В соответствии с физ. смыслом m, n, J_0 законы распределения E_{ez} имеют вид, представленный на рисунке 3.19, а следы силовых линий E_{ez} как произведение законов распределения – на рисунке 3.20.

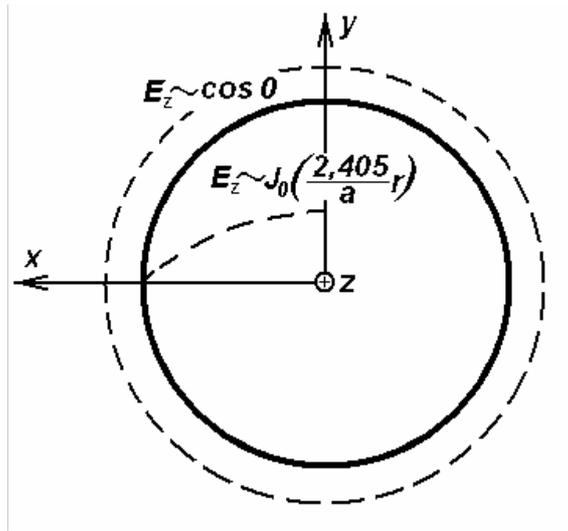


Рисунок 3.19 – Законы распределения продольной составляющей вектора E волны E_{01} в круглом волноводе

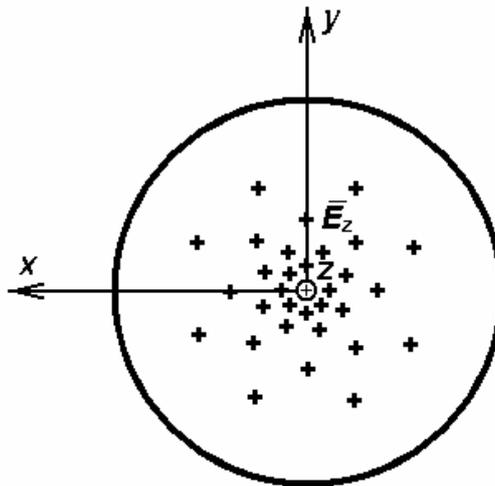


Рисунок 3.20 – Следы продольной составляющей силовых линий вектора E в поперечном сечении

б) Согласно закону непрерывности вектор E электрического поля в плоскости поперечного сечения xOz имеет вид, изображенный на рисунке 3.21: линии \vec{E} начинаются и заканчиваются на стенках круглого волновода под углом 90° ; $E_{r \max}$ в центре осевого сечения и равна нулю на стенках круглого волновода, E_\perp - наоборот.

в) Структура \bar{J}_{cm} и магнитного поля определяется согласно 1-му закону Максвелла и следствию из него.

д) Структура электрического поля и магнитного поля в плоскости поперечного сечения xOz показана на рисунке 3.21: электрическое поле – радиальное, магнитное поле – концентрическое (магнитное поле максимально у стенок круглого волновода, электрическое поле минимально у стенок круглого волновода); $\bar{E} \perp \bar{H}$ в любой точке в плоскости поперечного сечения xOz ; вектор Пойнтинга перпендикулярен плоскости поперечного сечения ($\bar{S} \perp S_{\perp}$).

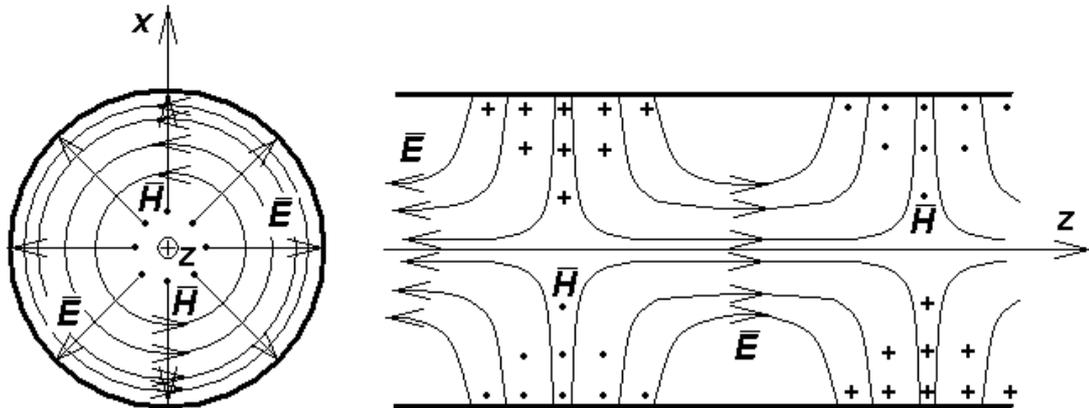


Рисунок 3.21 – Структура волны E_{01} в круглом волноводе

е) Структура ЭМП вдоль оси z определяется $\Lambda^{E_{01}}$, структура ЭМП вдоль оси z перемещается с $V_{\phi}^{E_{01}}$, а ЭМЭ – с $V_{гр}^{E_{01}}$.

Одним из важных свойств, которые обуславливают широкое применение волн типа E_{01} , является то, что она обладает осевой симметрией. Структура поля E_{01} в круглом волноводе сильно напоминает структуру силовых линий одной четверти длины волны поля H_{10} в продольной плоскости, параллельной широким стенкам. На этом свойстве основана конструкция трансформатора типа волн $H_{10} \leftrightarrow E_{01}$.

Используя продольную составляющую H_{hz} (при $m = 0, n = 1$).

$$H_{hz} = \kappa_h^2 \cdot g_h \cdot J_0\left(\frac{3,832}{a} r\right), \quad (3.103)$$

и физический смысл m, n, J_0 определим структуру поля волны H_{01} (рисунок 3.22).

Структура поля волны H_{01} обладает такими особенностями.

1. В плоскости поперечного сечения S_{\perp} структура поля волны H_{01} обладает осевой симметрией: электрическое поле – концентрическое, ($E = 0$ при $r = 0$ и $r = a$), магнитное – радиальное ($\bar{H}_r = \max$ при $r = 0, r = a$ и $\bar{H}_r = 0$ при $r = a/2$; поведение \bar{H}_z – противоположное); в любой точке поверхности S_{\perp} вектор \bar{E} пер-

пендикулярен вектору \vec{H} и, следовательно вектор Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ перпендикулярен плоскости поперечного сечения S_{\perp} .

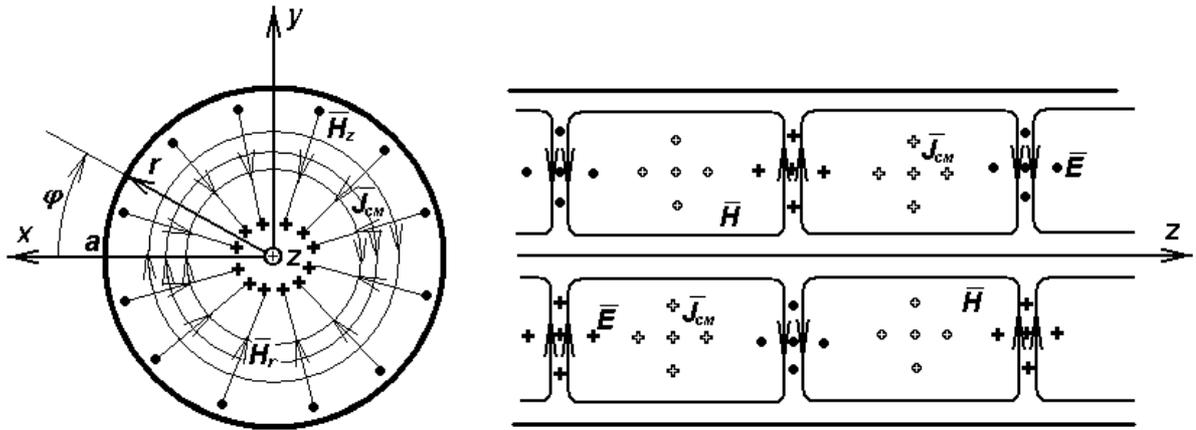


Рисунок 3.22 – Структура поля волны H_{01} в круглом волноводе

2. Структура поля вдоль оси z определяется длиной волны $\Lambda^{H_{01}}$. Следует отметить, что $\lambda_{кр}^{H_{01}} = \frac{2\pi a}{3,832} < \lambda_{кр}^{E_{01}} = \frac{2\pi a}{2,405}$, т.е. $\omega_{кр}^{H_{01}} > \omega_{кр}^{E_{01}}$. Кроме этого, как показывает теоретические исследования (см. таблицы 3.1 и 3.2) при возбуждении волн H_{0n} в круглом волноводе возбуждаются вырожденные волны типа

$$E_{1n}(\lambda_{кр}^{H_{0n}} = \lambda_{кр}^{E_{1n}}), V_{\phi}^{H_{0n}} = V_{\phi}^{E_{1n}}, V_{гр}^{H_{0n}} = V_{гр}^{E_{1n}}, \text{ но } Z^{H_{0n}} \neq Z^{E_{1n}}.$$

3. Структура поля движется вдоль оси z с $V_{\phi}^{H_{01}}$, ЭМЭ – с $V_{гр}^{H_{01}}$.

Круглые волноводы используются как для передачи ЭМЭ, т.е. в качестве антенного фидера, так и для конструирования ряда элементов волноводного тракта. При этом необходимо отметить следующее.

1. Волна H_{11} используется для передачи больших ЭМЭ, т.к. ЭМП в плоскости поперечного сечения S_{\perp} распределено почти равномерно, при этом вес и габариты ВВ оказываются наименьшими, т.к. критическая длина волны $\lambda_{кр}^{H_{11}}$ максимальна. Т.к. плоскость поляризации в круглом волноводе неустойчива из-за особенностей геометрии волновода, то для передачи ЭМЭ на значительные расстояния применяют эллиптические волноводы.

2. E_{01} используются для передачи ЭМЭ от неподвижной части волноводного тракта к подвижной с помощью вращающегося сочленения, т.к. поле волны E_{01} – осесимметричное. H_{01} для этих целей не используется, т.к. $\lambda_{кр}^{H_{01}} < \lambda_{кр}^{E_{01}}$ и при этом в волноводе возникают не только волны типа E_{01} , H_{11} , но вырожденная волна типа E_{11} . Кроме того, при использовании H_{01} вес и габариты вращающихся сочленений будут большими, чем при использовании волны E_{01} .

3. H_{01} используется для передачи ЭМВ на большие расстояния, т.к. поле волны H_{01} обладает уникальным свойством: потери в металле α_m уменьшаются с увеличением частоты ЭМВ. При этом применяются специальные меры для подавления в круглом волноводе вырожденных и всех низших типов волн.

3.2.7 Резонаторы волноводной формы

Объемным резонатором называется заполненная диэлектриком часть пространства, ограниченная замкнутой, хорошо проводящей поверхностью. В конструктивном отношении объемные резонаторы подразделяются на резонаторы волноводного типа (прямоугольной и круглой формы) и неволноводного типа (сложной формы). Объемные резонаторы используются в технике СВЧ в качестве колебательных систем, т.к. контуры с сосредоточенными параметрами LC в диапазоне СВЧ неприменимы по следующим причинам:

- 1) собственная частота контура ограничивается $L_{\text{монт}}$ и $C_{\text{монт}}$;
- 2) с увеличением f размеры контура становятся соизмеримыми с λ , и контур начинает излучать, т.е. растут потери на излучение;
- 3) с увеличением f увеличивается активное сопротивление за счет скин-эффекта, т.е. растут тепловые потери;
- 4) с увеличением f необходимо уменьшить L и C , следовательно их размеры, что влечет за собой снижение допустимой колебательной мощности.

Для упрощения анализа вначале рассмотрим резонаторы с идеально проводящими стенками, внутренняя полость которых заполнена идеальным диэлектриком, а затем учтем потери введением коэффициента затухания.

3.2.8 Типы полей в резонаторах

Прямоугольный объемный резонатор (ПОР) представляет собой отрезок прямоугольного волновода с размерами a , b , h (рисунок 3.23).

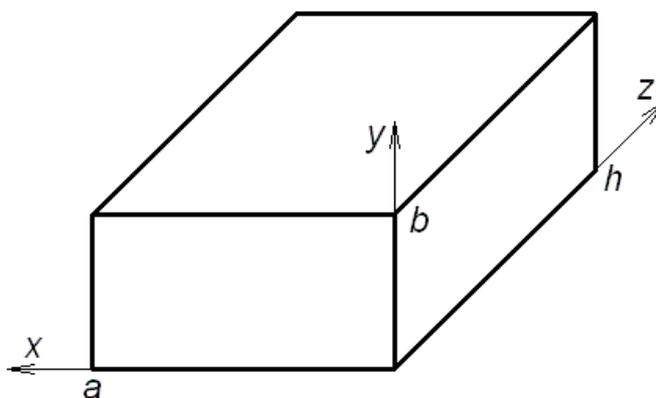


Рисунок 3.23 – Прямоугольный объемный резонатор

Определение поля в ПОР осуществляется согласно общей методики, рассмотренной ранее, из уравнения (3.93):

$$\dot{\bar{Z}}_{e,h} = \dot{\Psi}_{e,h} \cdot \dot{g}_{e,h} \cdot \bar{Z}^0,$$

при следующих граничных условиях

$$E_\tau = 0, H_n \text{ на контуре } L \text{ и } S_{\perp 1,2}. \quad (3.104)$$

$$\Psi_e(x, y) = C_2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y; \quad (3.105)$$

$$\Psi_h(x, y) = C_1 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (3.106)$$

Решение $\psi_{e,h}$ при $E_\tau = 0$ на контуре L рассмотрено в п. 3.2.3.

Решением $g_{e,h} = Ae^{-\gamma_{e,h}z}$ при $E_\tau = 0, H_n = 0$ на $S_{\perp 1,2}$ являются:

$$g_e(z) = A_2 \cos \frac{\ell\pi}{h} z, \quad g_h(z) = A_1 \cos \frac{\ell\pi}{h} z. \quad (3.107)$$

С учетом (3.105), (3.106) и (3.107) в прямоугольном резонаторе:

$$\dot{\bar{Z}}_e = B_2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z \cdot \bar{Z}^0, \quad B_2 = A_2 \cdot C_2; \quad (3.108)$$

$$\dot{\bar{Z}}_h = B_1 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z \cdot \bar{Z}^0, \quad B_1 = A_1 \cdot C_1. \quad (3.109)$$

Используя методику определения компонент поля, изложенную п. 3.2.3 найдем, что в прямоугольном объемном резонаторе компоненты поля будут определяться следующими соотношениями для полей "Е" типа:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ex} &= -E_m \frac{m\pi}{a} \frac{\ell\pi}{h} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\ \dot{E}_{ey} &= -E_m \frac{n\pi}{b} \frac{\ell\pi}{h} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\ \dot{E}_{ez} &= E_m \cdot \kappa_e^2 \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\ \dot{H}_{ex} &= jH_m \omega \epsilon_a \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\ \dot{H}_{ey} &= -jH_m \omega \epsilon_a \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\ \dot{H}_{ez} &= 0; \end{aligned} \quad (3.110)$$

для полей "Н" типа:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{hx} &= jH_m \omega \mu_a \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
\dot{E}_{hy} &= -jE_m \omega \mu_a \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
\dot{E}_{hz} &= 0; \\
\dot{H}_{hx} &= -H_m \frac{m\pi}{a} \frac{\ell\pi}{h} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
\dot{H}_{hy} &= -H_m \frac{n\pi}{b} \frac{\ell\pi}{h} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
\dot{H}_{hz} &= H_m \cdot \kappa_h^2 \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Из анализа выражений (3.110), (3.111) следует:

1. Каждое из полей типа "Е" и "Н" в прямоугольном объемном резонаторе характеризуется индексами: m , n , l . Поэтому поля в прямоугольном объемном резонаторе обозначаются символами E_{mnl} и H_{mnl} .

Физический смысл индексов m , n , l : они указывают на количество полуволн, укладываемых вдоль сторон прямоугольного объемного резонатора a , b , h (вдоль осей x , y , z) соответственно.

2. Векторы E и H полей типов Е, Н сдвинуты между собой по фазе на 90° (об этом говорит множитель j одним из векторов E или H), т.е. в прямоугольном объемном резонаторе в обоих случаях имеют место колебательный процесс, т.е. образуется стоячая волна.

На рисунке 3.24 изображен цилиндрический объемный резонатор радиусом $r = a$ и длиной h заполненный идеальным изотропным однородным диэлектриком. Источники поля в полости резонатора отсутствуют.

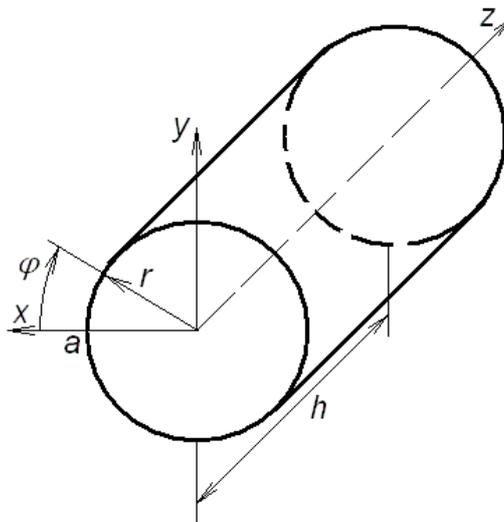


Рисунок 3.24 – Цилиндрический объемный резонатор

Применим методику, подобную использованной для прямоугольного резонатора. Используя выражения (3.93), (3.94) с учетом граничных условий соотношения для компонентов \vec{E} – поля будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{er} &= -E_m \frac{\ell\pi}{h} \cdot \frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot J'_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{E}_{e\varphi} &= E_m \frac{\ell\pi}{h} \cdot \frac{m}{r} \cdot J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{E}_{ez} &= E_m \cdot \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \right)^2 \cdot J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{H}_{er} &= -jH_m \omega\epsilon_a \cdot \frac{m}{r} \cdot J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0) \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{H}_{e\varphi} &= -jH_m \omega\epsilon_a \cdot \frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot J'_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{H}_{ez} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Для H -поля:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{hr} &= jE_m \omega\mu_a \cdot \frac{m}{r} \cdot J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{E}_{h\varphi} &= jE_m \omega\mu_a \cdot \frac{\beta_{mn}}{a} \cdot J'_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{E}_{hz} &= 0; \\
 \dot{H}_{hr} &= H_m \frac{\ell\pi}{h} \cdot \frac{\beta_{mn}}{a} \cdot J'_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{H}_{h\varphi} &= -H_m \frac{\ell\pi}{h} \cdot \frac{m}{r} \cdot J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi + \varphi_0) \cdot \cos \frac{\ell\pi}{h} z; \\
 \dot{H}_{hz} &= H_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} \right)^2 \cdot J_m \left(\frac{\beta_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{\ell\pi}{h} z.
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Из формул (3.112), (3.113) следует:

1) векторы \vec{E} и \vec{H} полей типов "E" и "H" сдвинуты по фазе на 90° (множитель j перед одним из компонентов), т.е. в резонаторе в обоих случаях имеет место колебательный процесс (стоячая волна).

2) Компоненты E и H полей зависят от постоянных $\frac{\alpha_{mn}}{a}$ $\left(\frac{\beta_{mn}}{a} \right)$ и $\frac{\ell\pi}{h}$.

Таким образом, в цилиндрическом объемном резонаторе всегда существует бесконечное число собственных длин волн (собственных частот), которые определяются типом волн "E" или "H" и значением индексов m , n , физический

смысл которых такой же как у аналогичных индексов в круглом волноводе, а индекс l показывает сколько стоячих полуволн поля укладывается вдоль оси z (размера h).

3.2.9 Собственная длина волны резонатора

Из (3.110), (3.111) следует, что компоненты поля определяются постоянными $\frac{m\pi}{a}$, $\frac{n\pi}{b}$, $\frac{\ell\pi}{h}$. Физический смысл коэффициентов m , n установлен ранее. По аналогии с ними, физический смысл индекса l заключается в том, что он показывает сколько стоячих полуволн ЭМП укладывается вдоль h . С другой стороны, по аналогии с линией передачи $\frac{\ell\pi}{h}$ характеризует распространение поля вдоль оси z , т.е. для объемного резонатора $\frac{\ell\pi}{h} = \beta_{eh}$ - постоянная распространения ЭМП в объемном резонаторе вдоль оси z . Из формулы $\beta_{eh} = \sqrt{k^2 - \alpha_{eh}^2}$ найдем, что

$$k^2 = \alpha_{eh}^2 + \beta_{eh}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{h}\right)^2; \quad (3.114)$$

$$\lambda_{p\ m,n,\ell}^{E,H} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{h}\right)^2}}, \quad (3.115)$$

где λ_p – собственная длина волны в резонаторе, соответствующая собственной частоте ПОР f_p (аналог $\lambda_{кр}$ в регулярной линии передачи).

$$f_p = \frac{V_\Phi}{\lambda_p} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{h}\right)^2}. \quad (3.116)$$

Поступая таким же образом, как и при определении λ_p в ПОР, из формул (3.95), (3.96) для цилиндрического резонатора найдем, что

$$\lambda_{p\ m,n,\ell}^E = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{h}\right)^2}}, \quad (3.117)$$

$$\lambda_{p\ m,n,\ell}^H = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\beta_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{h}\right)^2}}. \quad (3.118)$$

Собственная длина волны объемного резонатора для каждого типа волн "E_{mn}" или "H_{mn}" определяется размерами резонатора a, b, и h – прямоугольного, либо a и h – цилиндрического. Следует иметь в виду, что любой резонатор имеет бесконечный ряд собственных длин волн, соответствующих собственным частотам. Все собственные частоты объемного резонатора кратны собственным частотам, соответствующим простейшим типам волн, которые показаны на рисунке 3.25. Возбуждение резонатора происходит при совпадении частоты источника ЭМ колебаний с собственной частотой объемного резонатора.

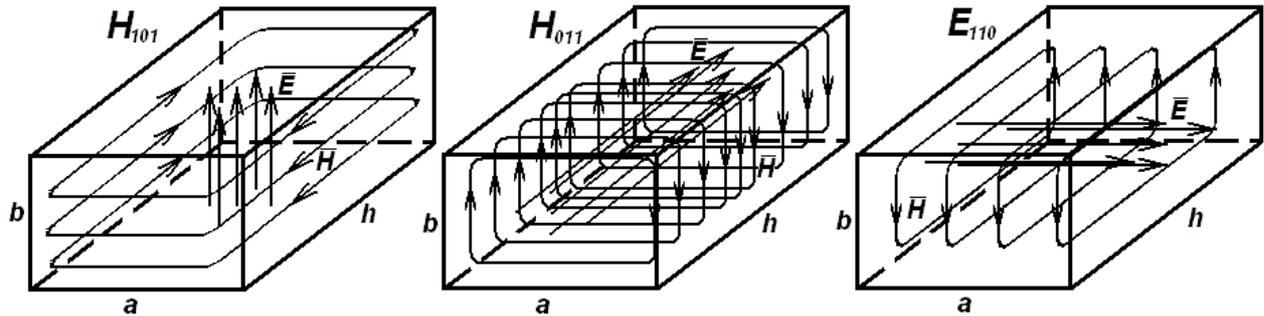


Рисунок 3.25 – Простейшие типы волн в прямоугольном резонаторе.

3.2.10 Добротность реальных объемных резонаторов

Известно, что полоса пропускания резонансных систем определяется как $\Delta f \approx f_p/Q$, где Q – добротность резонансных систем. В реальных объемных резонаторах $Q \neq \infty$, $\Delta f \neq 0$ т.к. имеются потери мощности, из-за чего колебания будут затухать. Основными являются потери в металлических стенках объемных резонаторов P_m , в диэлектрике P_d и потери на излучение при отборе мощности из объемного резонатора $P_{изл}$.

Введем добротность резонатора как отношение энергии, запасенной в нем к энергии потерь за период колебаний

$$Q = 2\pi \frac{W}{P_{пот} \cdot T}.$$

Добротность Q , при которой учитывается только потери в металле и диэлектрике, называется собственной, а с учетом потерь и на излучение – нагруженной добротностью. В дальнейшем будет рассматриваться собственная добротность

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_g}. \quad (3.119)$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$P_{\text{пот}} = -\frac{dW}{dt}, Q = \omega \frac{W}{P_{\text{пот}}}, \text{ т.е. } P_{\text{пот}} = \omega \frac{W}{Q}. \text{ Тогда } \frac{dW}{dt} + W \frac{\omega}{Q} = 0,$$

решением которого является:

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega t}{Q}} \Rightarrow E = E_0 e^{-\frac{\omega t}{2Q}} = E_0 e^{-\frac{\pi}{QT} t}. \quad (3.120)$$

Из выражения (3.120) следует, что за $t = QT$ амплитуда E уменьшается в $e^\pi = 23$ раза. Таким образом, добротность Q характеризует число периодов колебаний T , за которое E в колебательной системе уменьшается в $e^\pi = 23$ раза.

Используя приближенное граничное условие и считая, что магнитное поле сосредоточено в основном у стенок резонатора (наиболее неблагоприятный случай), можно полагать

$$Q_M \approx \frac{2}{d} \cdot \frac{V}{S}, \quad (3.121)$$

где $d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_m \sigma_m}}$ – толщина скин – слоя, глубина проникновения ЭМВ в металл стенок; V – объем резонатора, S – поверхность ОР.

Из формулы (3.121) следует, что:

- 1) Q_M растет с уменьшением d ;
- 2) Q_M растет с увеличением отношения V/S , которое максимально для выпуклых ОР простой формы, близкой у кубу или шару;

3) При использовании простейших видов колебаний и сохранении одномодового режима λ_p пропорциональна линейным размерам ОР. Тогда

$$\frac{V}{S} \sim \frac{\lambda^3}{\lambda^2} \sim \lambda \sim \frac{1}{f}.$$

Глубина проникновения поля в проводник $d \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$. Следовательно,

$$Q_M \sim \frac{\sqrt{f}}{f} \sim \frac{1}{\sqrt{f}}, \text{ т.е. с увеличением частоты } f \text{ добротность ОР } Q_M \text{ уменьшается}$$

пропорционально корню квадратному из нее.

Ранее было показано, что потери в диэлектрике определяются $\text{tg } \delta$, следовательно

$$Q_g = \frac{\omega \epsilon_a}{\sigma_g} = \frac{1}{\text{tg } \delta}, \quad (3.122)$$

из чего следует, что Q_d зависит от ω , ϵ_a , σ_g . При воздушном заполнении ОР $Q_d \gg Q_M$ ($P_d \ll P_M$), поэтому $Q \approx Q_M$ ($P_{\text{пот}} \approx P_M$). На практике: для коаксиальных резонаторов $Q \approx 10^3$, для ОР СМДВ $\approx 10^4$ и значительно выше Q колебательных

контуров LC. При использовании сверхпроводящих материалов и криогенной техники Q достигает несколько сот тысяч.

3.2.11 Объемные резонаторы сложной формы

Как колебательным системам генераторов СВЧ резонаторам волноводной формы присущи два серьезных недостатка:

1) отсутствие области с резко выраженной концентрацией ЭП, что приводит к неэффективному взаимодействию электронного потока с ЭП в колебательной системе;

2) большие (особенно в метровом и дециметровом диапазонах) размеры резонаторов (их длина h соизмерима с длиной волны). Для устранения второго недостатка в ОР вводится пластина специальной формы (рисунок 13.3).

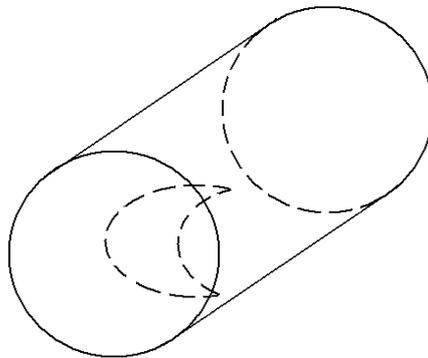


Рисунок 3.26 – Цилиндрический резонатор с пластиной специальной формы

При этом между торцом ОР и пластиной резко возрастает концентрация ЭП, что приводит к увеличению $C_{\text{ЭКВ}}$ и уменьшению f_p (увеличению λ_p) резонатора при $L_{\text{ЭКВ}} \approx \text{const}$, $n = \text{const}$. Меняя расстояние d можно изменять $C_{\text{ЭКВ}}$, а следовательно и λ_p при $h = \text{const}$.

Для устранения первого недостатка в качестве колебательных систем генераторов СВЧ (магнетроны, амплитроны и т.д.) используются резонаторы сложной формы (чаще всего тороидальные камерные резонаторы), показанные на рисунке 3.27.

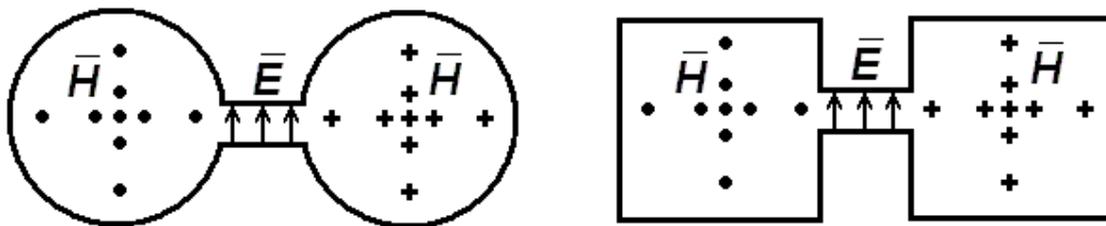


Рисунок 3.27 – Тороидальные резонаторы

Особенностью таких резонаторов является малый зазор ($d \ll \lambda$) в области взаимодействия электронного потока с ЭП резонатора. Неравенство $d \ll \lambda$ приводит к тому, что ЭП и МП оказываются пространственно разнесенными, т.е. приводит к образованию системы с квазисосредоточенными параметрами C_3 и L_3 . Как показывают расчеты

$$C_3 = \epsilon_0 \frac{\pi r_0^2}{d}; \quad L_3 = \frac{\mu}{i} \int_{S_{\perp}} \bar{H} d\bar{S}_{\perp}, \quad (3.123)$$

где $2r_0$ – расстояние между тороидальными камерами, d – величина зазора, i – ток по периметру сечения резонатора; S_{\perp} – площадь поперечного сечения резонатора.

Поскольку ЭП и МП оказываются разнесенными в пространстве, то электронный поток не взаимодействует с МП. В результате этого МП не расфокусирует сгруппированный ранее поток электронов, т.е. условия взаимодействия электронного потока с ЭП резонаторов улучшаются. Методы изменения f_p резонаторов сложной формы вытекают из формул (3.123) для C_3 и L_3 .

Независимо от конструкции объемных резонаторов их общими признаками являются: высокая добротность (несколько тысяч, а иногда и десятков и сотен тысяч) и соизмеримость их размеров с длиной волны. Все это делает целесообразным их использование на сантиметровых, дециметровых и отчасти метровых волнах в качестве частотно-избирательных элементов. В авиационном РЭО объемные резонаторы волноводного типа нашли широкое применение в качестве входных цепей приемников, составной части устройств стабилизации частоты передатчиков и в качестве элементов антенно-фидерных устройств.

Резонаторы сложной формы являются неотъемлемой частью конструкции генераторов на маячковых триодах, клистродах, магнетронах и других СВЧ приборах, работающих на основе взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем.

Вопросы для самоконтроля

1. Классификация линий передачи. Типы линий передачи.
2. Какая частота (длина волны) называется критической?
3. Длина волны в линии передачи.
4. Что называется фазовой скоростью волны в волноводе?
5. Что такое поперечное характеристическое (волновое) сопротивление?
6. Основная волна в прямоугольном волноводе и ее характеристики.
7. Структура волны H_{10} в прямоугольном волноводе.
8. Волны высших типов в прямоугольных волноводах.
9. Основная волна в круглом волноводе и ее характеристики.
10. Волны высших типов в круглом волноводе.
11. Что такое собственная длина волны резонатора? Какая величина ей аналогична в волноводе?
12. Для чего используются резонаторы сложной формы?

3.3 Замедляющие системы СВЧ

Как было показано ранее, фазовая скорость ЭМВ может равняться скорости света в свободном пространстве (c), а также быть больше ее (при распространении ЭМВ в волноводах). Принцип работы СВЧ электронных приборов (например, ЛБВ, ЛОВ и др.) основан на взаимодействии электронного потока с ЭМВ. Наиболее эффективно длительное взаимодействие потока с волной происходит в случае, когда V_ϕ ЭМВ оказывается примерно равной скорости движения электронов V_e в параллельном с ней электронном потоке приборов. В зависимости от величины напряжения на ускоряющем электроде $V = (0,0344 \div 0,78)c$. Поэтому для выполнения условия синхронизма ($V_\phi \approx V_e$), требуется изменения V_ϕ до этих значений, т.е. требуется замедление ЭМВ от единиц до нескольких десятков раз.

Принцип работы СВЧ антенн, использующих медленные волны, основан на явлении концентрации их энергии в непосредственной близости от поверхности антенн и распространении вдоль нее. Как показывают расчеты, основная часть энергии ЭМВ концентрируется в непосредственной близости от замедляющей системы (антенны) при $V_\phi = (0,95 \div 0,99)c$ и, следовательно при небольшом замедлении ЭМВ.

3.3.1 Способы замедления электромагнитных волн

Разновидность линии передачи, в которых ЭМВ распространяются с $V_\phi < c$ в данной среде, называется замедляющей системой (ЗС). Из определения V_ϕ для распространяющихся ЭМВ следует, что

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu - \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}}} = \frac{c}{K_3}, \quad (3.124)$$

где $K_3 = \sqrt{\epsilon \mu - \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}}$; $\epsilon \mu - \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} > 1$.

Из выражения (3.124) следует: $V_\phi < c$, если $K_3 > 1$, т.е.

$$\epsilon \mu > 1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} \quad (3.125)$$

Неравенство (3.125) – условие замедления ЭМВ.

Способы замедления ЭМВ:

а) Поскольку в обычных ЛП с гладкими стенками $\kappa > 0$, то для обеспечения $K_3 > 1$ полость ЛП заполняется диэлектриком с $\epsilon \mu > 1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$. Следует заметить, что потери при этом значительно возрастают, диапазон изменения K_3 незначителен. Этот способ замедления ЭМВ применяется редко.

б) Использование эффекта возникновения замедленной поверхностной волны в оптически менее плотной среде, граничащей с более плотной средой. Для этого в полость ЛП, заполненной воздухом с $\epsilon_1\mu_1 \approx 1$ помещают слой диэлектрика с $\epsilon_2\mu_2 > 1$. Поэтому условие (3.125) имеет вид: $1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2\epsilon_0\mu_0}$, что возможно при $\frac{\kappa^2}{\omega^2\epsilon_0\mu_0} < 0$, т.е. $\kappa^2 < 0$ или

$$\kappa^2 = -u^2; \quad \kappa = ju. \quad (3.126)$$

Такие ЗС называются однородными. ЗС такого типа широко применяются при конструировании антенн поверхностных волн.

в) Помещение в полость ЛП, заполненной воздухом, непоглощающих периодических структур типов "спираль" и "гребенка". При этом изменяются граничные условия для векторов поля и, как и во втором случае, характер κ^2 . Такие ЗС называются неоднородными или периодическими. Периодические ЗС широко применяются там, где нужно добиться большого K_z (до нескольких десятков).

3.3.2 Однородные замедляющие системы. Свойства замедленных ЭМВ

Пусть ЗС представляет собой бесконечно протяженную вдоль осей z и y пластину диэлектрика толщиной d . ЭМВ, возбуждаемая бесконечно протяженным вдоль оси Oy источником, удаленным в " ∞ ", распространяется вдоль оси Oz (рисунок 3.28).

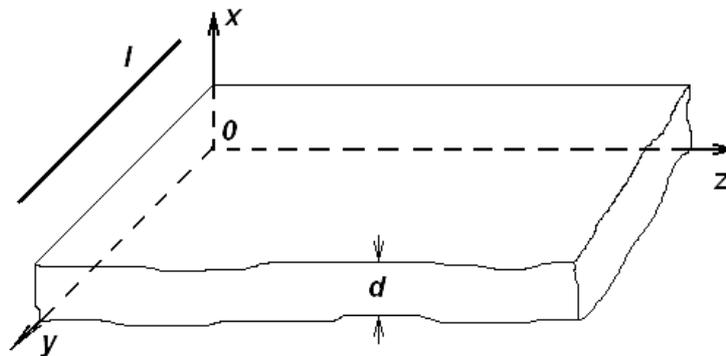


Рисунок 3.28 – Однородная замедляющая система

Так как такая система представляет открытую односвязную ЛП, то в ней могут существовать поля типа "Е" и "Н". В технике СВЧ чаще используются поля типа Е, для определения которых используется метод электрического вектора Герца $\dot{\vec{Z}}_e$.

При этом методе в выбранной системе координат:

$$\dot{\vec{E}}_e = \kappa_e^2 \dot{g}_e \Psi_e \vec{z}^0 + \frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z} \nabla_{\perp} \Psi_e; \quad \dot{\vec{H}}_e = j\omega \epsilon_a \dot{g}_e [\nabla_{\perp} \Psi_e, \vec{z}^0].$$

Определим эти векторы. Функция \dot{g}_e определится из телеграфного уравнения $\frac{\partial^2 \dot{g}_e}{\partial z^2} - (\kappa^2 - k^2)\dot{g}_e = 0$, решением которого является для прямой волны соотношение вида

$$\dot{g}_e = A_1 e^{-\sqrt{\kappa^2 - k^2}z} = A_1 e^{-\sqrt{-(u^2 + k^2)}z} = A_1 e^{-j\beta_3 z}, \quad (3.64)$$

где

$$\beta_3 = \sqrt{u^2 + k^2}, \quad (3.65)$$

фазовая постоянная замедленной волны.

Функция $\dot{\Psi}_e$ определится из мембранного уравнения $\nabla_{\perp}^2 \dot{\Psi}_e + \kappa_e^2 \dot{\Psi}_e = 0$ которое при заданных условиях будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{\Psi}_e}{\partial x^2} + \kappa_e^2 \dot{\Psi}_e = \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_e}{\partial x^2} - u^2 \dot{\Psi}_e = 0,$$

решением которого является

$$\dot{\Psi}_e = A_2 e^{-ux}. \quad (3.66)$$

Вычислив $\frac{\partial \dot{g}_e}{\partial z}$, $\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e$, $[\nabla_{\perp} \dot{\Psi}_e, \bar{z}^0]$ и подставив в формулы для \bar{E}_e и \bar{H}_e , найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_e &= -u^2 C e^{-ux} e^{-j\beta_3 z} \bar{z}^0 + j u \beta_3 C e^{-ux} e^{-j\beta_3 z} \cdot \bar{x}^0; \\ \dot{\bar{H}}_e &= j \omega \epsilon_a u C e^{-ux} e^{-j\beta_3 z} \cdot \bar{y}^0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где $C = A_1 A_2$.

Из анализа формул (3.67) можно сделать следующие выводы:

а) По мере увеличения координаты x (удаления от поверхности ЗС) все компоненты ЭМВ убывают как e^{-ux} ; чем больше u , тем быстрее, т.е. ЭМВ концентрируется у поверхности ЗП, и тем сильнее, чем больше u . Поэтому такие ЭМВ называются поверхностными.

б) Поверхностное сопротивление ЗС, в которой существует замедленная волна типа "Е",

$$\dot{Z}_S^E = \frac{E_{\tau}}{H_{\tau}} = \frac{E_z}{H_y} = -\frac{u}{j\omega\epsilon_a} = j\frac{u}{\omega\epsilon_a} = jx_s, \quad (3.68)$$

т.е. является чисто индуктивным.

Аналогично можно доказать, что для волны типа "Н" \dot{Z}_S^H будет чисто емкостным. Для выполнения (3.68) необходимо чтобы

$$d \left\langle \frac{\lambda}{4\sqrt{\epsilon}} \right\rangle. \quad (3.69)$$

в) Величина

$$V_{\phi_3} = \frac{\omega}{\beta_3} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + u^2}} < \frac{\omega}{k} = c, \quad (3.70)$$

т.е. фазовая скорость меньше скорости света в данной среде. Поэтому такие ЭМВ называются замедленными, а системы – замедляющими.

д) Поскольку E_z и H_y сдвинуты на 90° , а E_x и H_z – в фазе, то ЭМВ распространяется только вдоль оси Oz . Поэтому открытые ЗС можно использовать в качестве открытых ЛП ЭМЭ.

е) Фазы составляющих ЭМП с увеличением z изменяются линейно. Поэтому такие ЗС называются *однородными*.

Плоские однородные структуры или слабо искривленные используются преимущественно в антеннах поверхностных волн.

3.3.3 ЗС типа "гребенка". Пространственные гармоники

Замедляющая система типа "гребенка" непоглощающая (хорошо проводящая) периодическая структура с периодом L , высотой зубцов h , толщиной зубцов S (рисунок 3.29).

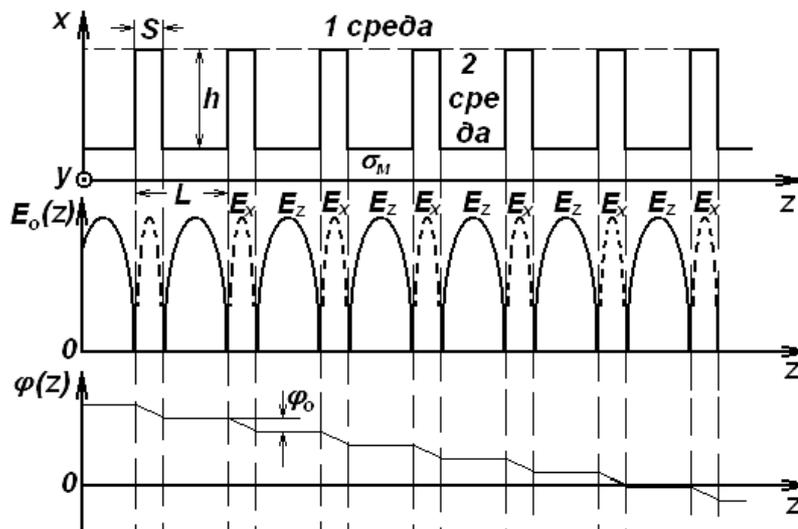


Рисунок 3.29 – Замедляющая система типа "гребенка"

Замедляющее действие такой структуры объясняется поперечным относительно оси z распространением ЭМВ в канавках (между зубцами) и продольным (вдоль оси z) распространением ЭМВ только над зубцами структуры. Рассмотрим особенности ЭМВ над замедляющей поверхностью yOz .

В периодических ЗС закон изменения фазы вдоль Oz различен между зубцами и над ними, поэтому их называют *неоднородными*.

Исходя из особенностей распространения ЭМВ в ЗС типа "гребенка" $E_x \neq 0$ над поверхностью зубцов, и $E_x = 0$ вне их (см. рисунок 3.29), т.е. E_x является функцией периода L . В этом случае амплитуду E_x в смежных периодах струк-

туры можно представить как $\dot{E}_x = \dot{E}(z+L) = \dot{E}(z)e^{-j\phi_0}$, где $\phi_0 = k \cdot Z$ изменение фазы E_x при распространении над поверхностью одного зубца. Формально представим изменение фазы на зубце ϕ_0 в виде линейно изменяющимся в течение всего периода L с фазовой постоянной $\beta_0 = \phi_0/L$. Амплитудное значение функции $\dot{E}(z)$ можно представить в виде Фурье: $E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nz}$, а саму функцию $\dot{E}(z)$ как

$$\dot{E}_x = \dot{E}(z)e^{-j\phi_0} = \dot{E}_0(z)e^{j(\omega t - \beta_0 z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\omega t} e^{-j\left(\frac{2\pi}{L}n + \beta_0\right)z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{-j\beta_n z} \quad (3.71)$$

Определим особенности ЭМВ над замедляющей поверхностью из формулы (3.71):

а) ЭМП представляет собой бесконечную сумму гармоник с одинаковыми ω , но с разными амплитудами A_n , фазовыми постоянными, коэффициентами замедления

$$\beta_n = \beta_0 \pm \frac{2\pi}{L}n, \quad V_{\phi n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + 2\pi n}L, \quad K_{zn} = \frac{C}{V_{\phi n}},$$

которые и называются *пространственными гармониками*. Гармоника с $n = 0$ называется *основной*, с $n \neq 0$ – *высшими* пространственными гармониками. Пространственные гармоники с $\beta_n > 0$ ($n = +1, +2$) называются *прямыми* (они распространяются вдоль оси z), а с $\beta_n < 0$ ($n = -1, -2, \dots$) – *обратными* (они распространяются в отрицательном направлении оси z). Основная пространственная гармоника также является прямой ($\beta_0 > 0$).

б) Каждая пространственная гармоника – это замедленная ЭМВ со своей амплитудой β_n , $V_{\phi n}$, K_{zn} , A_n . С увеличением n : A_n уменьшается (как коэффициент ряда Фурье) – β_n увеличивается $V_{\phi n}$ уменьшается, K_{zn} увеличивается.

в) В соответствии с формулой (3.70) представим

$$V_{\phi n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\sqrt{u_n^2 + k^2}} \quad (3.72)$$

Поскольку для всех гармоник $k = \omega\sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \text{const}$, то с увеличением $n \rightarrow \beta_n \uparrow \rightarrow u_n \uparrow$, т.е. с увеличением n амплитуда n -ой гармоники при удалении от замедляющей поверхности затухает сильнее (с увеличением n пространственная гармоника сильнее прижимается к поверхности).

д) У всех пространственных гармоник

$$V_{\text{гpn}} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = 1/d\beta_n/d\omega = \frac{1}{d\left(\beta_0 - \frac{2\pi}{4}n\right)} = \frac{d\omega}{d\beta_0} = V_{\text{гp0}} = \text{const}, \quad (3.73)$$

т.е. групповые скорости $V_{\text{гpn}}$ всех пространственных гармоник одинаковы.

е) Пространственные гармоники отдельно существовать друг от друга не могут, т.к. каждая из них в отдельности не удовлетворяет граничным условиям на зубцах ЗС. Однако каждая из них может взаимодействовать с электронным потоком при условии $V_e \approx V_{\text{фн}}$. На практике в приборах СВЧ организуется взаимодействие электронного потока с основной и первыми гармониками ($n = \pm 1$), т.к. остальные гармоники переносят незначительную энергию и сильно прижаты к замедляющей поверхности.

Определим влияние параметров гребенчатой ЗС на замедление ЭМВ. Известно, что у короткозамкнутого отрезка линии, которым можно представить пространство между зубцами, входное сопротивление равно

$$X_S = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \operatorname{tg} kh .$$

Для существования замедленной ЭМВ типа "Е" необходимо, чтобы

$$X_S = \frac{u}{\omega \epsilon_a} > 0 ,$$

т.е.

$$u = X_S \omega \epsilon_a = X_S k / \sqrt{\mu_a / \epsilon_a} = k \operatorname{tg} kh > 0 . \quad (3.74)$$

Из (3.74) следует, что

$$u > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} kh > 0 \Rightarrow kh \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow h \leq \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4} . \quad (3.75)$$

Из формулы (3.74) также следует, что

$$V_{\text{фз}} = \frac{\omega}{\beta_3} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + k^2 \operatorname{tg}^2 kh}} = c |\cos kh| = \frac{c}{K_3} . \quad (3.76)$$

Из формулы (3.76) следует, что

$$K_3 = \frac{1}{|\cos kh|} = |\sec kh| = \left| \sec 2\pi \frac{h}{\lambda} \right| . \quad (3.77)$$

Из формул (3.76) и (3.77) следует вывод, что при $h = \frac{\lambda}{4}$; $K_3 = \infty$; $V_{\text{фз}} = 0$, т.е.

над ЗП типа "гребенка" с $h = \frac{\lambda}{4}$ ЭМВ не распространяется. Такие гребенки в технике СВЧ используются в качестве фильтров – пробок СВЧ. Поэтому одним из условий замедления ЭМВ в ЗС типа "гребенка" является

$$h < \lambda / 4 . \quad (3.78)$$

Следует заметить, что формулы (3.74) – (3.78) получены для ЗС с бесконечно тонкими зубцами. Строгое решение электродинамической задачи для реальной ЗС типа "гребенка" показывает, что

$$K_3 = \sqrt{1 + \left(\frac{t}{t+S} \right)^2 \operatorname{tg}^2 kh} , \quad (3.79)$$

где $(t = L - S)$ ширина канавки.

Из (3.79) следует, что при увеличении S (уменьшении t) K_3 уменьшается и при $S = L$ ($t = 0$) $K_3 = 1$, т.е. поверхностная замедленная ЭМВ над гладкой идеально проводящей поверхностью, как и следовало ожидать, не возникает.

Получим второе условие замедления в замедляющей системе типа "гребенка"

$$\frac{c}{V_\phi} = \frac{c}{\omega L} (\varphi_0 + 2\pi n) = \left(\frac{\varphi_0}{2\pi} + n \right) \frac{\lambda}{L}. \quad (3.80)$$

Поскольку для замедленной ЭМВ $\frac{V_\phi}{c} < 1$, то при $\varphi_0 = 2\pi$ для $n = 1$ получаем

$$\frac{2L}{\lambda} \leq \frac{V_\phi}{c} < 1 \rightarrow 2L < \lambda, \quad L < \frac{\lambda}{2}. \quad (3.81)$$

Из (3.81) следует, что при $L \rightarrow \lambda/2$; $V_\phi/c \rightarrow 1$; $K_3 \rightarrow 1$ и при $L = \frac{\lambda}{2}$, $K_3 = 1$, т.е. в ЗС типа "гребенка" с $L = \lambda/2$ замедление ЭМВ отсутствует.

При рассмотрении ЗС типа "гребенка" из реального проводника ($\sigma_\mu \neq \infty$) очевидно, что поверхностное сопротивление (импеданс) Z_S будет иметь кроме реактивной (индуктивной – для волн типа "Е" и емкостной – для волн типа "Н") и активную составляющую, поэтому фазовый сдвиг между E_x и H_y не будет равен строго 90° . Это приведет к появлению нормальной к поверхности зубцов составляющей вектора Пойнтинга ($\bar{S}_n \neq 0$), за счет которой часть ЭМВ будет переносится в толщу проводника и будет излучаться вдоль оси X , т.е. в ЗС типа "гребенка" из реального проводника существуют потери за счет излучения и тепловые потери.

3.3.4 Замедляющая система типа "спираль"

Такая ЗС представляет собой спираль из тонкой хорошо проводящей металлической проволоки ($\sigma \approx \infty$). Радиус спирали равен a , шаг (период) намотки спирали L , угол намотки спирали α (рисунок 3.30), здесь же показана развертка отдельного витка спирали.

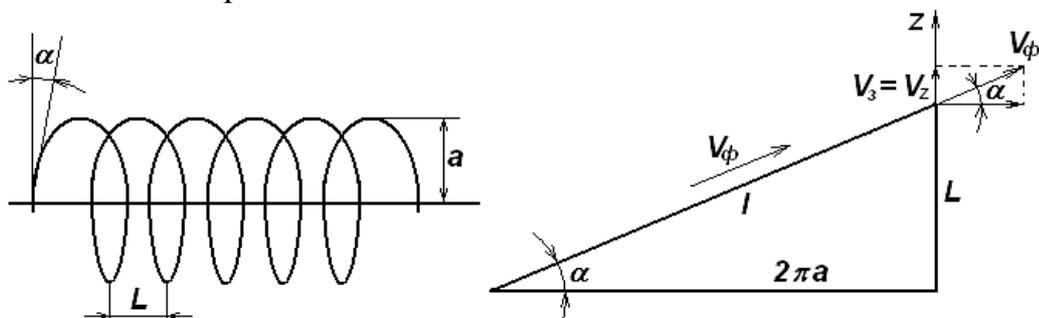


Рисунок 3.30 – Замедляющая система типа "спираль" и развертка одного витка

Граничные условия на идеальном проводнике, требующие перпендикулярности к нему вектора \vec{E} вынуждают ЭМВ распространяться вдоль витка ℓ с фазовой скоростью равной скорости света ($V_{\phi\ell} = c$). Из рисунка следует (при малых углах α), что фазовая скорость вдоль оси спирали

$$V_{\phi L} = V_{\phi z} = V_{\phi\ell} \sin \alpha = c \cdot \sin \alpha;$$

$$K_3 = \frac{c}{V_{\phi z}} = \frac{c}{c \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\ell}{L} = \frac{\sqrt{(2\pi a)^2 + L^2}}{L} \approx \frac{2\pi a}{L}. \quad (3.82)$$

Из (3.82) следует, что K_3 не зависит от λ . Это свойство ЗС типа "спираль" широко используется в ЛБВ для усиления высокочастотных сигналов, несущая частота которых изменяется в большом диапазоне частот.

Как показывают более точные расчеты это справедливо, если $L / \lambda > 1/30$. При $L/\lambda < \frac{1}{30}$ K_3 уменьшается с уменьшением L / λ .

Следует отметить, что наряду с теми функциями, которые выполняют ЗС в различных областях радиотехники, следует отметить еще одну: односторонние и ребристые ЗС на практике широко применяются в качестве открытых волноводов, достоинствами которых являются: простота конструкций; малое затухание распространяющихся вдоль них волн; возможность передачи больших мощностей без опасности электрического пробоя. Диэлектрические волноводы применяются в диапазоне $\lambda \leq 1$ см, причем затухание ЭМВ при $\lambda = 1$ см такое же, как и у металлических, а при $\lambda = 1$ мм – в несколько раз меньше, к тому же диэлектрические волноводы допускают изгиб без искажения поля с радиусом кривизны $R = (10 \dots 20) \lambda$.

Вопросы для самоконтроля

1. Для чего используются замедляющие системы СВЧ?
2. Какие способы замедления электромагнитных волн вы знаете?
3. Какие замедляющие системы называются однородными и почему.
4. Свойства замедленных ЭМВ.
5. Какие замедляющие системы называются неоднородными и почему?
6. Коэффициент замедления ЗС типа "гребенка".
7. Что такое пространственные гармоники? Их основные свойства.
8. Условия замедления ЭМВ в ЗС типа "гребенка".
9. Какие отличия ЗС типа "гребенка" из реального проводника от идеальных?
10. Замедляющая система типа "спираль".
11. Коэффициент замедления ЗС типа "спираль".
12. Области применения ЗС типа "спираль".

3.4 Электромагнитные волны в гиротропных средах

В природе встречаются вещества, свойства которых зависят от направления, в котором происходит воздействие на вещество. Это явление называется анизотропией (от греч. *неизотропный* – *имеющий разные свойства в различных направлениях*), а вещества, где оно наблюдается – анизотропными. Анизотропия может являться внутренним свойством вещества, либо создаваться внешним воздействием. Широко известны пьезоэлектрики, в которых наблюдается анизотропия электрической поляризации, которая присуща некоторым природным кристаллов. Некоторые вещества обладают анизотропными свойствами по отношению к электромагнитному полю, причем чаще всего анизотропия проявляется только в особых условиях – в присутствии постоянного магнитного поля, которое является внешним воздействием.

В электродинамике анизотропными называют среды, электродинамические параметры которых ϵ , μ , σ зависят от направления векторов поля. В зависимости от параметра, который является анизотропным, различают анизотропные диэлектрики, анизотропные магнетики и анизотропные проводники.

Таковыми веществами, известными в настоящее время, являются ионизированный газ (плазма), помещенный в магнитное поле, и намагниченные ферриты (один из классов ферромагнетиков). Так как эти среды способны осуществлять изменение первоначальной ориентации (вращение) векторов ЭМП при распространении, то их называют гиротропными (от греч. *вращающий*).

3.4.1 Намагниченная плазма

Ионизированный газ ионосферы находится в постоянном магнитном поле Земли, напряженность которого составляет 40 А/м. Присутствие постоянного магнитного поля изменяет условия движения электронов, в результате изменяются и электрические параметры ионизированного газа.

Рассмотрим прежде всего, как влияет магнитное поле на движение электрона в том случае, когда электромагнитные колебания отсутствуют и электрон совершает только тепловое движение. Направим вектор постоянного магнитного поля \vec{H}_0 в сторону отрицательных значений оси y . Из всей совокупности электронов для рассмотрения выберем электрон, скорость теплового движения V_e , которого параллельна вектору \vec{i}_x . В постоянном магнитном поле на электрон действует сила $\vec{F}_H = -e\mu_0|\vec{V}_e, \vec{H}|$, нормальная к направлению его первоначального движения, поэтому траектория движения электрона искривляется. Радиус кривизны траектории ρ определяется из уравнения движения электрона: $m_e V_e^2 / \rho = e\mu_0 V_e H_0$, где в левой части записана центробежная сила, уравновешивающая силу \vec{F}_H . Из этого уравнения видно, что электрон движется по окружности, радиус которого $\rho = m_e V_e / e\mu_0 H_0$. Направление вращения совпадает

ет с движением часовой стрелки, если смотреть вдоль силовых линий магнитного поля. Время обращения электрона по окружности

$$T_H = 2\pi r / V_e = 2\pi m_e / e\mu_0 H_0,$$

а частота вращения

$$f_H = 1/T_H = e\mu_0 H_0 / 2\pi m_e. \quad (3.83)$$

Явление вращения электрона в постоянном магнитном поле называется гиромагнитным резонансом, а частота $f_H = 1,4$ МГц. Если рассмотреть движение иона в магнитном поле, то частота вращения иона окажется в тысячи раз меньше f_H и выйдет из диапазона радиочастот (f_H – частота гиромагнитного резонанса).

Рассмотрим движение электрона в постоянном магнитном поле при прохождении электромагнитной волны. Уравнение движения электрона в постоянном магнитном поле имеет вид:

$$-e\bar{E} - e\mu_0 \left(\frac{d\bar{\ell}_e}{dt} \bar{H}_0 \right) = m_e \frac{d^2\bar{\ell}_e}{dt^2} + m_e \frac{d\bar{\ell}_e}{dt} v, \quad (3.84)$$

где $\bar{\ell}_e$ - вектор смещения электрона относительно равновесного положения.

В присутствии постоянного магнитного поля вектор силы, действующей на электрон, не параллелен вектору \bar{E} проходящей волны, направление движения электрона не параллельно направлению вектора напряженности электрического поля волны и зависит от взаимного направления векторов \bar{E} и \bar{H}_0 . Следовательно, векторы \bar{D} и \bar{E} не параллельны, параметры среды зависят от направления распространения волны, среда становится анизотропной.

Для определения диэлектрической проницаемости ионизированного газа в присутствии постоянного магнитного поля введем понятие тензора диэлектрической проницаемости анизотропной среды $\bar{D} = \|\epsilon_a\| \cdot \bar{E}$ или в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z = \epsilon_0E_x + P_x, \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z = \epsilon_0E_y + P_y, \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z = \epsilon_0E_z + P_z. \end{aligned}$$

Составляющие вектора \bar{P} определим из уравнения (3.84). Для этого умножив обе части уравнения на eN_e/m_e и, обозначив, $\bar{P} = -eN_e\bar{\ell}_e$, $\omega_0^2 = e^2N_e/m_e\epsilon_0$; $\omega_H = e\mu_0H_0/m_e$ перепишем его в виде

$$\omega_0^2\epsilon_0\bar{E} - j\omega\omega_H[\bar{P}, \bar{h}] = -\omega(\omega - iv)\bar{P},$$

где N_e – число электронов в единице объема газа, e – заряд электрона, m_e – масса электрона, v – число соударений электрона с ионами, где \bar{h} - единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением вектора \bar{H}_0 .

Выберем ось z декартовой системы координат совпадающей с направлением вектора \bar{H}_0 и распишем последнее уравнение по координатным осям:

$$\begin{aligned}\omega_0^2 \varepsilon_0 E_x - j\omega\omega_H P_y &= -\omega(\omega - j\nu)P_x, \\ \omega_0^2 \varepsilon_0 E_y - j\omega\omega_H P_x &= -\omega(\omega - j\nu)P_y, \\ \omega_0^2 \varepsilon_0 E_z &= -\omega(\omega - j\nu)P_z.\end{aligned}$$

Решая систему уравнений, выразим составляющие вектора \bar{P} через составляющие вектора \bar{E} :

$$\begin{aligned}P_x &= \frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]} [(\omega - j\nu)E_x + j\omega_H E_y], \\ P_y &= -\frac{\varepsilon_0 \omega_0}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]} [-j\omega_H E_x + (\omega - j\nu)E_y], \\ P_z &= -\frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{\omega(\omega - j\nu)} E_z.\end{aligned}$$

Подставив полученные выражения (3.84), найдем компоненты тензора $\|\dot{\varepsilon}\|$ относительной диэлектрической проницаемости:

$$\|\dot{\varepsilon}\| = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2(\omega - j\nu)}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}; & -j \frac{\omega_H \omega_0^2}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}; & 0 \\ +j \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}; & 1 - \frac{\omega_0^2(\omega - j\nu)}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}; & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - j\nu)} \end{vmatrix}, \quad (3.85)$$

откуда видно, что $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$.

Если частота соударений электрона с тяжелыми частицами мала по сравнению с рабочей частотой: $\omega \gg \nu$, как это имеет место на высоких частотах, и поглощением можно пренебречь, то выражение (3.85) упрощается, однако компоненты тензора останутся комплексными:

$$\|\dot{\varepsilon}\| = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; & -j \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}; & 0 \\ +j \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}; & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{vmatrix}. \quad (3.86)$$

Из (3.86) видно, что влияние постоянного магнитного поля на параметры ионизированного газа сказывается особенно сильно, если рабочая частота близка к гирочастоте. Для ионосферы это соответствует диапазону гектометровых волн. При $\omega \gg \omega_H$ в ряде случаев можно пренебречь влиянием постоянного

магнитного поля, однако некоторые эффекты проявляются и на высоких частотах.

3.4.2 Основные свойства ферритов

Феррит представляет собой соединения, образуемые окисью железа с окислами двухвалентных металлов (никеля, цинка и т.д.), а в структурном отношении – совокупность доменов (областей размерами до 1 мкм) обладающих значительным по величине, но произвольно ориентированным в пространстве магнитным моментом \bar{M}_{oi} .

При отсутствии внешнего подмагничивающего поля $\sum_i \bar{M}_{oi} = \bar{M}_o = 0$, феррит представляет собой полупроводник с $\epsilon_\phi = 2 - 20$; $\mu_\phi \approx 1$; $\sigma_\phi = 10^{-6} \dots 10^{-12}$ См/м.

Если феррит поместить во внешнее постоянное поле (магнитное) с $|\bar{H}_0| = |\bar{H}_{нас}| \gg |\bar{M}_o|$, то векторы \bar{M}_{oi} начнут прецессировать вокруг вектора H_0 с амплитудой прецессии (углом) ψ и частотой прецессии ω_0 , которая называется резонансной частотой феррита (рисунок 3.31).

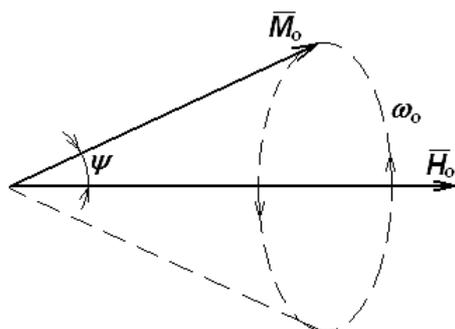


Рисунок 3.31 – Прецессия в ферритах

Величины ψ , ω_0 определяются свойствами феррита и величиной \bar{H}_0 . В течение долей микросекунды прецессия за счет потерь в феррите затухает, и векторы \bar{M}_{oi} устанавливаются параллельно вектору \bar{H}_0 . За счет этого происходит значительное усиление \bar{H}_0 в феррите, т.к. $|\bar{M}_o| = \sum_i |\bar{M}_{oi}| \gg |\bar{H}_0|$, что эквивалентно значительному увеличению μ_ϕ от нескольких десятков до нескольких тысяч.

При этом необходимо отметить, что:

1. Направление прецессии векторов \bar{M}_o связано с направлением вектора \bar{H}_0 правилом правого винта (буравчика).
2. Плоскость прецессии \bar{M}_o (т.е. плоскость, в которой прецессирует или вращается конец вектора \bar{M}_o) всегда перпендикулярна вектору \bar{H}_0 .

Если на намагниченный до насыщения феррит воздействует переменное магнитное поле, то при условии, что:

а) плоскость, в которой вращается конец вектора $\vec{H} \sim$, и плоскость прецессии вектора \vec{M}_0 параллельны;

б) направления вращения векторов $\vec{H} \sim$ и \vec{M}_0 совпадают, то вектор \vec{M}_0 начинает прецессировать вокруг вектора H_0 с частотой $\omega = \omega_{\text{ЭМВ}}$, т.е. ЭМВ будет взаимодействовать с веществом феррита (рисунок 3.32).

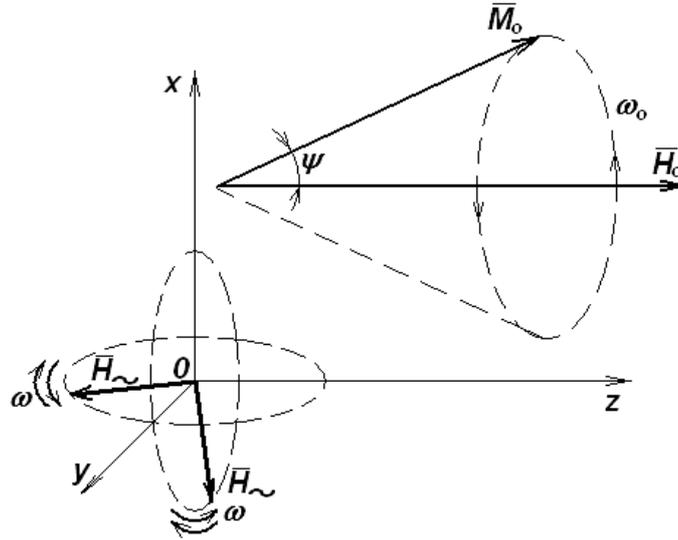


Рисунок 3.32 – Взаимодействие ЭМВ с ферритами

Если выполняются условия а) и б), а также условие $\omega_{\text{ЭМВ}} = \omega_0$, то ЭМВ будет отдавать ферриту почти всю свою энергию, т.е. ЭМВ будет почти полностью поглощаться ферритом. Это явление называется ферромагнитным резонансом.

При нарушении хотя бы одного из условий а), б) или когда $\omega_{\text{ЭМВ}}$ значительно отличается от ω_0 , то ЭМВ с ферритом взаимодействовать не будет, т.е. феррит для такой ЭМВ представляет собой полупроводник с электромагнитными параметрами, указанными выше.

3.4.3 Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита

При условии, что феррит намагничен до насыщения $|\vec{H}_0| \gg |\vec{M}_{0i}|$, магнитные свойства феррита будут характеризоваться несимметричным тензором комплексной магнитной проницаемости $\|\dot{\mu}_a\|$, который при $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ будет иметь следующий вид

$$\|\dot{\mu}_a\| = \mu_0 \begin{vmatrix} \dot{\chi} & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \dot{\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (3.87)$$

где $\dot{\chi}$, κ , μ_z - элементы матрицы, значения которых зависят от параметров феррита и величины \vec{H}_0 .

Суммарный магнитный момент феррита будем считать равным сумме магнитных спиновых моментов доменов; механический и магнитный моменты связаны зависимостью

$$\bar{M}_3 = -\gamma_0 \bar{K}_3, \quad (3.88)$$

где $\gamma_0 = 1,76 \cdot 10^4$ К/кг – коэффициент, называемый гиромагнитным отношением.

Под действием вращающего момента $[\bar{M}_3, \bar{H}_0]$ изменяется механический момент, производная которого по времени равна вращающему моменту

$$\frac{d\bar{K}_3}{dt} = \mu_0 [\bar{M}_3, \bar{H}_0],$$

или, учитывая (3.88), запишем

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma_0 \mu_0 [\bar{M}, \bar{H}_\Sigma], \quad (3.89)$$

где $M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M_3}{\Delta V}$ – суммарный магнитный силовой момент, H_Σ – вектор напряженности результирующего магнитного поля. Уравнение (3.89) устанавливает связь между вектором намагниченности феррита \bar{M} и вектором \bar{H}_Σ и поэтому позволяет определить магнитную проницаемость феррита, так как

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H}_\Sigma + \bar{M}) = \mu_0 (\bar{H}_\Sigma + \|\chi\| \cdot \bar{H}_\Sigma) = \|\mu_a\| \cdot \bar{H}_\Sigma,$$

где $\|\chi\|$ – тензор магнитной восприимчивости среды; $\|\mu_a\| = \mu_0 (1 + \|\chi\|)$ – тензор магнитной проницаемости среды.

В простейшем случае, когда феррит находится в однородном постоянном магнитном поле \bar{H}_0 и намагничен до насыщения, вектор намагниченности совпадает с вектором \bar{H}_0 по направлению.

Если на феррит еще воздействует слабое высокочастотное поле, вектор \bar{H} которого перпендикулярен \bar{H}_0 , то результирующее магнитное поле $\bar{H}_\Sigma = \bar{H} + \bar{H}_0$ вызывает малые отклонения моментов атомов от их положения равновесия, так что электроны феррита вновь начинают прецессировать. Причем теперь частота вынужденной прецессии оказывается равной частоте высокочастотного поля $\bar{H}(\omega)$. В результате прецессии вектор магнитного момента электрона описывает в пространстве коническую поверхность, а его конец — окружность в плоскости $z = \text{const}$. Представим вектор \bar{M} в виде суммы постоянного вектора, параллельного намагничивающему полю, и вектора $\bar{M}'(\omega)$, вращающегося с угловой скоростью ω в плоскости $z = \text{const}$, то есть

$$\bar{M} = M'_x \cdot \bar{x}^0 + M'_y \cdot \bar{y}^0 + M_0 \cdot \bar{z}^0.$$

Предполагая гармонический характер векторов $\bar{H}(\omega)$ и $\bar{M}'(\omega)$ и полагая, что для слабого поля выполняется условие

$$|\bar{H}(\omega)| \ll |\bar{H}_0|, \quad |\bar{M}(\omega)| \ll |\bar{M}_0|,$$

уравнения (3.87) в виде проекций на оси декартовой системы координат после приравнивания одноименных проекций можно представить

$$\left. \begin{aligned} j\omega \dot{M}'_x &= \mu_o \gamma_o M_o \dot{H}_y - \mu_o \gamma_o H_o \dot{M}'_y \\ j\omega \dot{M}'_y &= \mu_o \gamma_o M_o \dot{H}_x - \mu_o \gamma_o H_o \dot{M}'_x \\ j\omega \dot{M}'_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.90)$$

Разрешив эту систему относительно \dot{M}'_x , \dot{M}'_y , \dot{M}'_z , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}'_x &= \frac{-\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} \dot{H}_x - j \frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} \dot{H}_y \\ \dot{M}'_y &= j \frac{\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} \dot{H}_x - \frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} \dot{H}_y \\ \dot{M}'_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.91)$$

В матричной форме система (3.91) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{M}'_x \\ \dot{M}'_y \\ \dot{M}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & -j \frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & 0 \\ j \frac{\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & -\frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

или в сокращенной форме

$$\dot{M}' = \|\chi\| \cdot \dot{H},$$

где $\|\chi\|$ – тензор магнитной восприимчивости феррита.

Тогда тензор магнитной проницаемости $\|\mu_a\| = \mu_o (1 + \|\chi\|)$; или в развернутом виде

$$\|\mu_a\| = \mu_o \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & -j \frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & 0 \\ j \frac{\omega_o \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & 1 - \frac{\omega \mu_o \gamma_o M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Компоненты тензора в общем случае являются комплексными величинами: их действительные части определяют постоянные распространения волны в феррите в данном направлении, а мнимые части характеризуют потери элек-

ромагнитной энергии в феррите. И действительные и мнимые части тензора, кроме μ_{xz} , μ_{yz} , μ_{zx} , μ_{zy} , μ_{zz} сильно зависят от частоты ЭМВ и от величины \bar{H}_0 .

Возникающие при распространении ЭМВ в намагниченных ферритах эффекты и явления весьма специфичны и позволяют создавать на их основе различные невзаимные устройства и приборы техники СВЧ.

Явление гиротропии позволяет создавать различные специфические устройства, использующие свойства продольно и поперечно намагниченных ферритов. Так как все явления и эффекты, возникающие и в продольно и в поперечно намагниченных ферритах, в последних проявляются при меньших величинах подмагничивающего поля H_0 . Поэтому устройства на основе поперечно намагниченных ферритах используются значительно чаще. Исключение составляет эффект Фарадея, который проявляется только в продольно намагниченном феррите.

Поскольку в ферритовых устройствах используется два частных случая намагничивания феррита – продольное и поперечное – и электромагнитные волны ведут себя в этих случаях по-разному, то целесообразно рассмотреть эти частные случаи в отдельности.

3.4.4 Распространение плоской ЭМВ в продольно намагниченном феррите

Феррит называется продольно намагниченным, если направление вектора фазовой скорости \bar{V}_ϕ совпадает с направлением вектора \bar{H}_0 поля подмагничивания. Пусть $\bar{H}_{\text{внеш}} = \bar{H}_0$; $\bar{Z}^0 \parallel \bar{V}_\phi \parallel \bar{H}_0$. Из решения волновых уравнений (2.21) при этих условиях следует:

$$1. H_x, H_y, E_x, E_y \neq 0; H_z, E_z = 0; \frac{\partial}{\partial z} \neq 0; \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \text{ т.е. в продольно намаг-}$$

ниченном феррите распространяется волна типа Т (типа ТЕМ), векторы $\bar{E} \sim$ и $\bar{H} \sim$ которой вращаются в плоскости ХОУ, которая параллельна плоскости прецессии вектора M_0 .

2. $H_x \neq H_y, E_x \neq E_y$, т.е. в продольно намагниченном феррите ЭМВ является эллиптически поляризованной. Поэтому вектор $H \sim$ (аналогично и вектор $E \sim$) можно представить в виде двух ЭМВ с круговой поляризацией, векторы \bar{H} / \bar{E} / которых имеют одинаковые частоты $\omega_{\text{ЭМВ}}$, но противоположные направления вращения и разные амплитуды, т.е. направления вектора \bar{H} одной из этих ЭМВ совпадает с направлением прецессии вектора \bar{M}_0 (рисунок 3.33).

В продольно намагниченном феррите ЭМВ называется правополяризованной (обозначается "+"), если направления вращения векторов $\bar{H} \sim$ и прецессии \bar{M}_0 совпадают и левополяризованной (обозначается "-"), если эти направления не совпадают. Таким образом, следует ожидать, что правополяризованная ЭМВ может при определенных условиях взаимодействовать с ферритом, левополяризованная ЭМВ с ферритом взаимодействовать не будет.

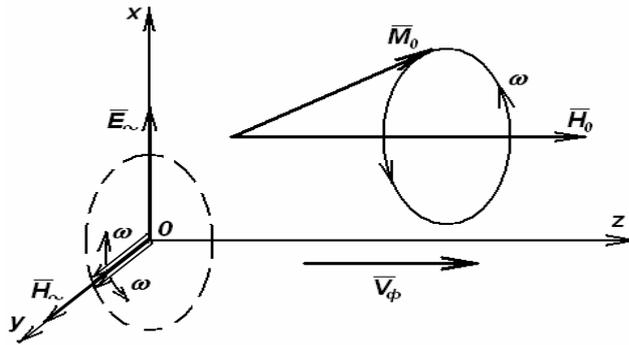


Рисунок 3.33 – Правополяризованная и левополяризованная волны в продольно намагниченном феррите

3. Постоянные распространения правополяризованной и левополяризованной ЭМВ будут определяться следующими соотношениями:

$$\dot{\gamma}^+ = \alpha^+ + j\beta^+ = jk_0 \sqrt{\varepsilon(\dot{\chi} + \kappa)} = jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^+}; \quad (3.94)$$

$$\dot{\gamma}^- = \alpha^- + j\beta^- = jk_0 \sqrt{\varepsilon(\dot{\chi} - \kappa)} = jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^-}, \quad (3.95)$$

где α – характеризует активные потери ЭМВ в феррите; β – фазовая постоянная ЭМВ в феррите.

4. Из формул (3.94, 3.95) следует, что

$$\begin{aligned} j\beta^+ &= jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^+} \rightarrow \beta^+ \sim R_e \left\{ \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^+} \right\} = \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}_1^+}; \\ \alpha^+ &= R_e \left\{ jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^+} \right\} \rightarrow \alpha^+ \sim J_m \left\{ \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^+} \right\} = j\sqrt{\varepsilon\dot{\mu}_2^+}; \\ j\beta^- &= jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^-} \rightarrow \beta^- \sim R_e \left\{ \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^-} \right\} = \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}_1^-}; \\ \alpha^- &= R_e \left\{ jk_0 \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^-} \right\} \rightarrow \alpha^- \sim J_m \left\{ \sqrt{\varepsilon\dot{\mu}^-} \right\} = j\sqrt{\varepsilon\dot{\mu}_2^-}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

На рисунке 3.34 приведены графики зависимостей $\mu_{1,2}^\pm = f_0(H_0)$ рассчитанные согласно формулам (3.94 – 3.96) при $\omega_{ЭМВ} = \text{const}$.

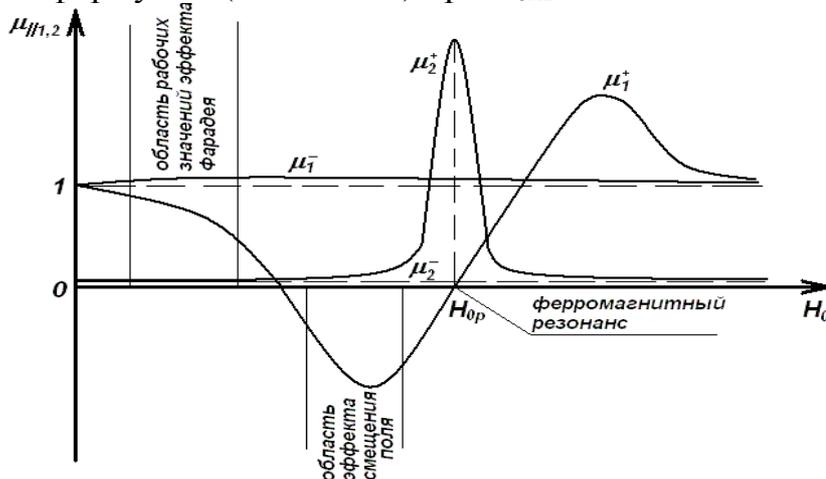


Рисунок 3.34 – Магнитная проницаемость продольно намагниченного феррита

Свойства левополяризованных и правополяризованных ЭМВ в продольно намагниченном феррите:

1) При изменении H_0 значения $\mu_{1,2}^- \approx \text{const}$ $\mu_{1,2}^+ = \text{var}$, откуда следует, что $\alpha^- = \text{const}$ $\beta^- = \text{const}$ $V_{\phi}^- = \omega/\beta^- = \text{const}$ $\alpha^+ = \text{var}$; $\beta^+ = \text{var}$; $V_{\phi}^+ = \omega/\beta^+ = \text{var}$; т.е. левополяризованная ЭМВ с ферритом почти не взаимодействует, правополяризованная ЭМВ с ферритом взаимодействует.

2) При $H_0 = 0$ и $H_0 \gg H_{0p\parallel}$ (а также при $\omega_0 \ll \omega_{\text{ЭМВ}}$, $\omega_0 \gg \omega_{\text{ЭМВ}}$) $\mu_{1,2}^{\pm} \approx \mu_{1,2}^- \rightarrow \alpha^+ \approx \alpha^-$; $\beta^+ \approx \beta^-$; $V_{\phi}^+ \approx V_{\phi}^-$, т.е. при этих значениях H_0 обе волны в продольно намагниченном феррите ведут себя примерно одинаково, т.е. с ферритом не взаимодействуют.

3) В зависимости от характера изменения $\mu_{1,2}^{\pm}$ различают следующие области значений H_0 :

а) $0 < H_0 < H_{011}'$ – область рабочих значений H_0 (область эффекта Фарадея). В этой области значений H_0 $\mu_2^+ \approx \mu_2^- \approx \text{const}$ и мало, откуда следует, что $\alpha^+ \approx \alpha^- \approx \text{const}$ и мало, т.е. поглощение для волн обеих поляризаций практически отсутствует; $\mu_1^+ < \mu_1^-$, откуда следует, что $\beta^+ < \beta^- \rightarrow V_{\phi}^+ = \omega/\beta^+ > V_{\phi}^- = \omega/\beta^-$.

Таким образом, при таких значениях H_0 обе волны в одинаковой степени незначительно поглощаются ферритом, при этом правополяризованная ЭМВ распространяется с большей фазовой скоростью V_{ϕ}^+ , чем левополяризованная ЭМВ. Этот эффект получил название эффекта Фарадея.

б) $H_{011}' < H_0 < H_{0p11}$ – область эффекта смещения поля. В этой области значений H_0 $\mu_1^+ < 0$; $\mu_1^- > 0$; $|\mu_1^+| > |\mu_2^+|$, откуда следует, что

$$|\beta^+| > |\alpha^+|; \quad j\gamma^+ = j(j\alpha^+) + jj\beta^+ = \alpha^+ - \beta^+ < 0; \quad \dot{H}^+ = \bar{z}^0 H^+ e^{j\omega t} e^{-j\gamma z} = \bar{z}^0 H^+ e^{j\omega t} e^{|\gamma|z}.$$

Таким образом, при этих значениях H_0 постоянная распространения правополяризованной ЭМВ в феррите $j\gamma^+$ является действительным отрицательным числом, а амплитуда H^+ с увеличением координаты z увеличивается, что невозможно физически ввиду отсутствия в феррите источников энергии, т.е. для правополяризованной ЭМВ феррит является реактивной средой, поэтому правополяризованная ЭМВ в продольно намагниченном феррите распространяться не может, последний вытесняет эту ЭМВ в окружающую среду, вдоль поверхности которой и распространяется правополяризованная ЭМВ. Этот эффект и получил название эффект смещения поля.

в) $H_0 > H_{0p11}$. При этих значениях $\mu_2^+ \approx \mu_2^- \approx \text{const}$ и мало, откуда следует, что $\alpha^+ \approx \alpha^- \approx \text{const}$ и мало; $\mu_1^+ > \mu_1^-$, откуда следует, что $\beta^+ > \beta^-$, $V_{\phi}^+ = \omega/\beta^+ < V_{\phi}^- = \omega/\beta^-$.

Таким образом, при этих значениях H_0 обе ЭМВ (право- и левополяризованные) в одинаковой степени незначительно поглощаются ферритом, при этом

левополяризованная ЭМВ распространяется в продольно намагниченном феррите с большей фазовой скоростью V_{ϕ}^{-} , чем правополяризованная ЭМВ.

4. $H_0 = H_{0p11}$. При этом значении H_0 $\mu_1^+ = 0$; $\mu_2^+ > 0$ и велико, откуда следует, что $\alpha^+ > 0$ и велико; $\beta^+ = 0$; $\gamma^+ = \alpha^+ + j\beta^+ \approx \alpha^+$; $\mu_1^- \neq 0$; $\mu_2^- > 0$ и мало откуда следует, что $\alpha^- > 0$ и мало, $\beta^- = 0$; $\gamma^- = \alpha^- + j\beta^- \approx \alpha^-$.

Таким образом, при этом значении H_0 почти вся энергия правополяризованной ЭМВ поглощается ферритом, т.е. правополяризованная ЭМВ в продольно намагниченном феррите не распространяется. Левополяризованная волна практически не поглощается. Это явление называется продольным ферромагнитным резонансом.

3.4.5 Явления и эффекты в продольно намагниченном феррите

Как было показано выше эффект Фарадея возникает в продольно намагниченном феррите при $0 < H_0 < H_{011}'$.

При этом $\mu_1^+ < \mu_1^- \rightarrow \beta^+ < \beta^- \rightarrow V_{\phi}^+ > V_{\phi}^- \rightarrow \lambda^+ = V_{\phi}^+ T > \lambda^- = V_{\phi}^- T$.

Рассмотрим, что произойдет с линейно поляризованной ЭМВ, распространяющейся в продольно намагниченном феррите при значениях H_0 .

Представим ЭМВ в виде суммы двух ЭМВ с круговой поляризацией, но с противоположными направлениями вращения \bar{H}^{\pm} (рисунок 3.35).

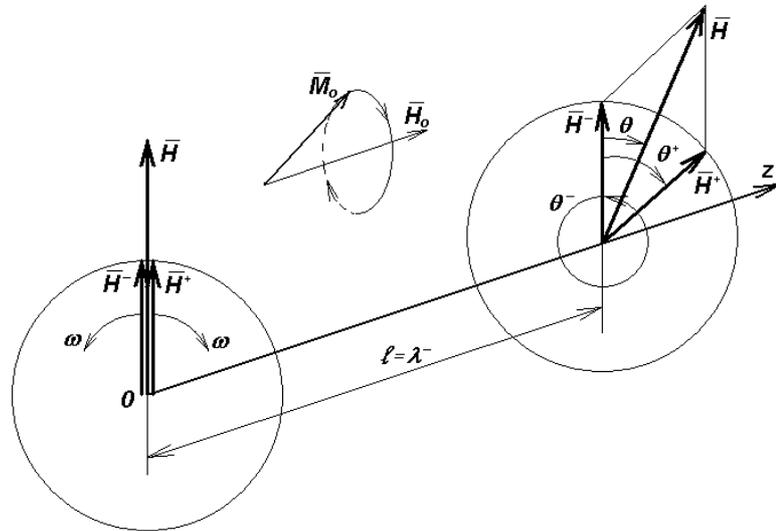


Рисунок 3.35 – Эффект Фарадея

Из рисунка 3.35 видно, что при выбранном направлении H_0 одна из ЭМВ является правополяризованной, другая – левополяризованной. На участке $l = \lambda^-$ вектор \bar{H}^- повернется на угол $\theta^- = \lambda^- \beta^- = 360^\circ$, а вектор \bar{H}^+ - на угол $\theta^+ = \lambda^- \beta^+ < \theta^-$. Таким образом, результирующий вектор \bar{H} в точке $Z = 0$ займет другое положение, отличающееся от положения вектора \bar{H} в точке $Z = 0$.

Явление вращения плоскости поляризации (плоскости, в которой находится вектор напряженности магнитного поля суммарной ЭМВ) в анизотроп-

ных средах называется эффектом Фарадея, а среды, в которых наблюдается эффект, называются гиротропными (вращающими) средами.

Свойства эффекта Фарадея.

1. Плоскость поляризации суммарной ЭМВ всегда поворачивается в направлении отстающего вектора \bar{H}^+ (в направлении прецессии вектора \bar{M}_0) на угол

$$\theta = \frac{\beta^+ - \beta^-}{2} \ell . \quad (3.97)$$

Поскольку в области рабочих значений $H_0 \ll H_{0p11}$ и при изменении H_0 или $\omega_{ЭМВ}$ β^+ и β^- изменяются незначительно, то и угол θ не зависит от величины H_0 или $\omega_{ЭМВ}$, а определяется только свойствами феррита.

2. При прохождении участка феррита длиной ℓ дважды (в прямом и обратном направлениях (угол θ удваивается, если смотреть вдоль оси Z и направления вектора H_0 . Это свойство эффекта Фарадея называется свойством невзаимности.

3. С изменением направления \bar{H}_0 на обратное изменяется на обратное направление вращения плоскости поляризации суммарной ЭМВ.

3.4.6 Распространение плоской ЭМВ в поперечно намагниченном феррите

Феррит называется поперечно намагниченным, если направление вектора фазовой скорости \bar{V}_ϕ перпендикулярно направлению вектора напряженности подмагничивающего поля \bar{H}_0 .

Пусть $\bar{H}_0 = H_0 \bar{Z}^0$, $\bar{V}_\phi // \bar{X}^0$. Из совместного решения уравнений при этих условиях следует (см. рисунок 3.36), что:

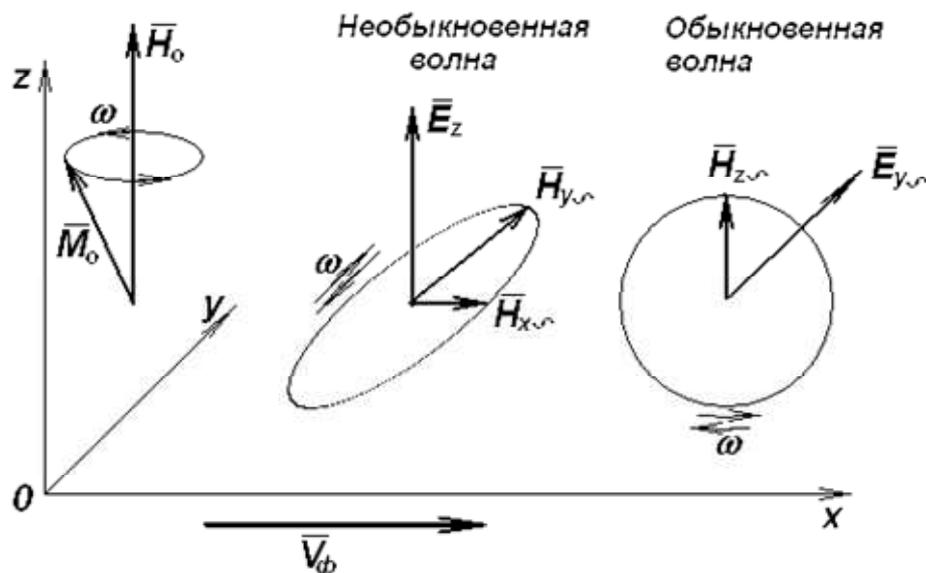


Рисунок 3.36 – Волны в поперечно намагниченном феррите

1) Вдоль оси X распространяется две ЭМВ. В первой из них $H_z \neq 0$, $E_y \neq 0$, это волна типа "Т". Поскольку плоскости вращения $\bar{H} \sim T$ -волны и прецессии вектора \bar{M}_0 взаимно перпендикулярны (т.е. не совпадают), то Т-волна с поперечно намагниченным ферритом не взаимодействует. Такая ЭМВ в поперечно намагниченном феррите называется обыкновенной ЭМВ.

2) Во второй ЭМВ $H_y \neq 0$; $H_x \neq 0$; $E_z \neq 0$, т.е. это волна типа "Н". Поскольку $H_x \neq H_y$, то Н-волна является эллиптически поляризованной, плоскость вращения вектора $\bar{H} \sim$ которой параллельная плоскости прецессии вектора \bar{M}_0 . Поскольку эллиптически поляризованную Н-волну можно представить в виде двух ЭМВ поляризованных по кругу, векторы $\bar{H} \sim$ которой не одинаковы по амплитуде и вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми частотами, то направление вращения вектора $\bar{H} \sim$ одной из них будет совпадать с направлением прецессии вектора \bar{M}_0 , т.е. эта ЭМВ при определенных условиях будет взаимодействовать с поперечно намагниченным ферритом. Такая ЭМВ в поперечно намагниченном феррите называется необыкновенной волной, а эффект возникновения такой ЭМВ в поперечно намагниченном феррите называется эффектом Коттон-Мутона.

3) Постоянные распространения обыкновенной и необыкновенной ЭМВ в поперечно намагниченном феррите определяются следующими формулами:

$$\dot{Y}_{об} = \alpha_{об} + j\beta_{об} = jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_z}; \quad (3.98)$$

$$\dot{Y}_H = \alpha_H + j\beta_H = jK_0 \sqrt{\frac{\epsilon(\kappa^2 - x^2)}{\kappa}} = jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}}. \quad (3.99)$$

4) Из совместного решения уравнений (3.98), (3.99) найдем, что

$$\begin{aligned} j\beta_{об} = jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_z} &\Rightarrow \beta \sim R_e \{ \sqrt{\epsilon\mu_z} \} = \sqrt{\epsilon\mu_z}; \\ \alpha_{об} = R_e \{ jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_z} \} &\Rightarrow \alpha_{об} \sim J_m \{ \sqrt{\epsilon\mu_z} \} = 0; \\ j\beta_H - jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}} &\Rightarrow \beta \sim R_e \{ \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}} \} = \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}}; \\ \alpha_H = R_e \{ jK_0 \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}} \} &\Rightarrow \alpha_H \sim J_m \{ \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}} \} = j\sqrt{\epsilon\mu_{\perp 2}}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

На рисунке 3.36 приведены зависимости $\mu_z, \mu_{\perp 1,2} = f(H_0)$, рассчитанные согласно выражениям (3.98)...(3.100) при $\omega_{\text{МВ}} = \text{const}$. На рисунке 3.36 также представлены для сравнения графики $\mu_{1,2}^+ = f(H_0)$ для случая продольного намагничивания феррита при $\omega_{\text{МВ}} = \text{const}$.

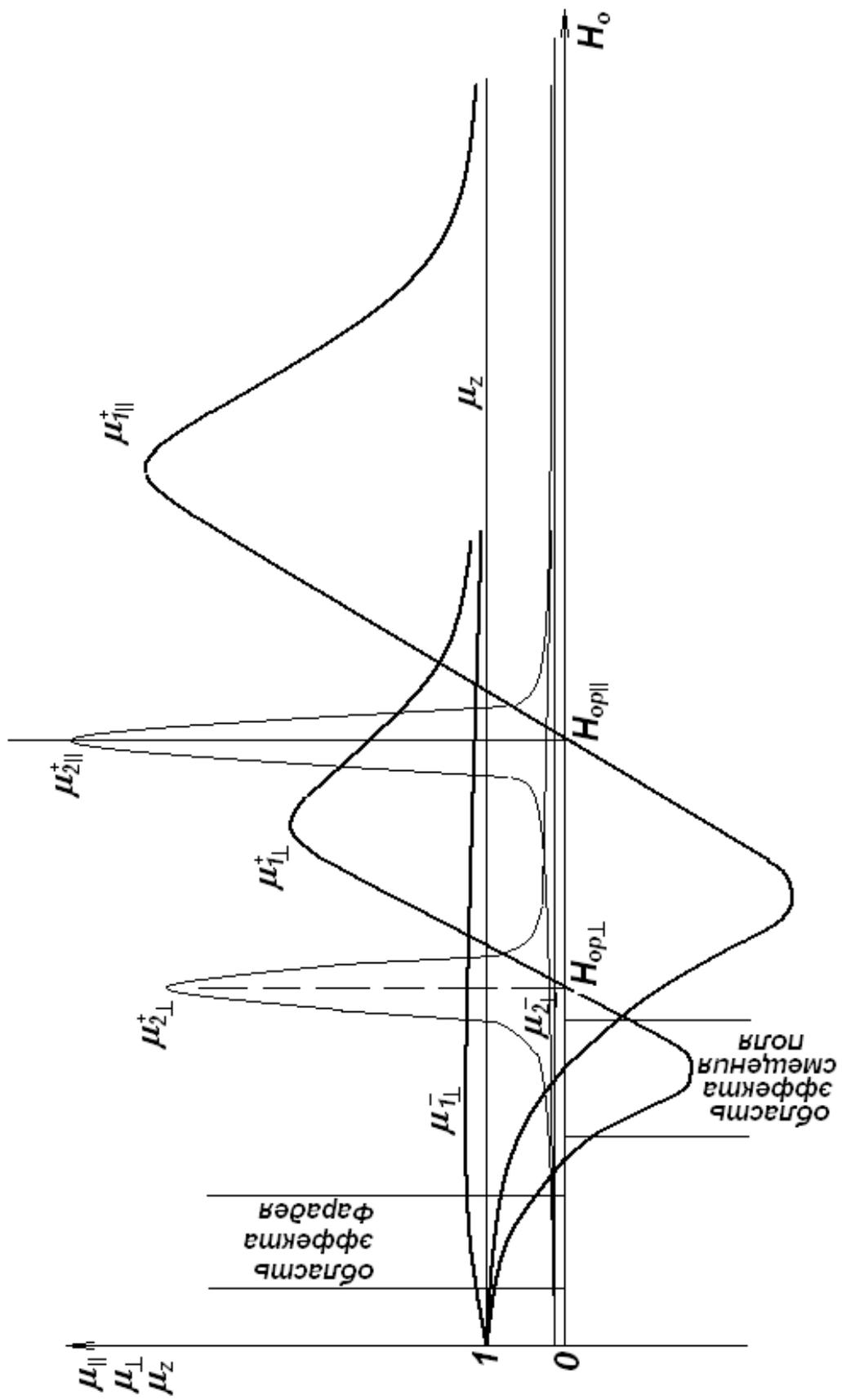


Рисунок 3.36 – Графики зависимостей составляющих магнитных проницаемостей от величины подмагничивающего поля

3.4.7 Явления и эффекты в поперечно намагниченном феррите

Свойства обыкновенной и необыкновенной ЭМВ в поперечно намагниченном феррите.

Из сравнения рисунков 3.34 и 3.36 следует, что свойства необыкновенной ЭМВ в поперечно намагниченном феррите подобны свойствам правополяризационной ЭМВ в продольно намагниченном феррите, а свойства обыкновенной ЭМВ в поперечно намагниченном феррите подобны свойствам левополяризационной ЭМВ в продольно намагниченном феррите.

Однако имеются и некоторые особенности. Отметим их:

1) В области рабочих значений H_0 ($0 < H_0 < H_{0\perp}$) необыкновенная ЭМВ в поперечно намагниченном феррите также распространяется с фазовой скоростью $V_{\text{фн}}$ большей, чем обыкновенная ЭМВ. Однако в поперечно намагниченном феррите эффекта Фарадея не наблюдается, т.к. плоскости вращения $\vec{N} \sim$ суммарной обыкновенной ЭМВ совпадают между собой, а $S_{\text{вращ}} \vec{N} \sim$ суммарной обыкновенной ЭМВ не параллельна плоскости прецессии \vec{M}_0 (см. условия возникновения эффекта Фарадея в продольно намагниченном феррите).

2) В области значений $H'_{0\perp} < H_0 < H_{0\text{р}\perp}$ наблюдается эффект смещения поля для необыкновенной ЭМВ, а при $H_0 = H_{0\text{р}\perp}$ для необыкновенной ЭМВ наблюдается явление ферромагнитного резонанса. Однако за счет более сложного взаимодействия необыкновенной ЭМВ с поперечно намагниченным ферритом эти эффекты и явления наступают при значительно меньших значениях H_0 , чем для правополяризованной ЭМВ в продольно намагниченном феррите.

По этой причине применение ферритовых устройств на основе поперечно намагниченных ферритов является более предпочтительным, т.к. вес и габариты постоянного магнита в этом случае, а значит и всего устройства, значительно меньше, чем в устройствах на основе продольно намагниченного феррита.

В радиотехнике явление гиротропии, во-вторых, проявляется при распространении ЭМВ в ионосфере Земли; во-вторых, на основе продольно и поперечно намагниченных ферритов создано большое разнообразие специфических устройств. Влияние намагниченной ионосферы на распространение радиоволн заключается в различии условий распространения ЭМВ вдоль силовых линий магнитного поля и поперек него. При продольном распространении наибольшее значение имеет различие в диэлектрических проницаемостях ионосферы для волн правого и левого вращения. Это приводит к эффекту аналогичному эффекту Фарадея: т.е. для волны с определенной частотой линейно поляризованная волна поворачивает свою плоскость поляризации и превращается в эллиптически поляризованную. Наибольшему влиянию подвержены ЭМВ с частотой близкой к гироскопической. Это соответствует диапазону средних волн. Однако поворот плоскости поляризации в ионосфере наблюдается и для ЭМВ более высоких частот (КВ и даже УКВ). При распространении ЭМВ поперек

магнитного поля Земли возникают обыкновенная и необыкновенная ЭМВ. Поскольку эти волны имеют различные гироскопические частоты, причем необыкновенная имеет две гироскопические частоты, таким образом, ЭМВ определенной частоты "расщепляется" на три волны, которые отражаются от трех различных слоев ионосферы (из-за зависимости гироскопической частоты от электронной концентрации).

При наклонном падении на ионосферу под малыми углами распространение ЭМВ можно считать квазипоперечным. Волны отразившиеся от ионосферы на разных высотах в этом случае попадают в точку приема с различными фазами и интерферируют, что приводит к различным эффектам (более подробно будут рассмотрены в разделе "распространение радиоволн").

Если угол падения достаточно велик, то отраженные волны попадают в различные точки земной поверхности (рисунок 3.37).

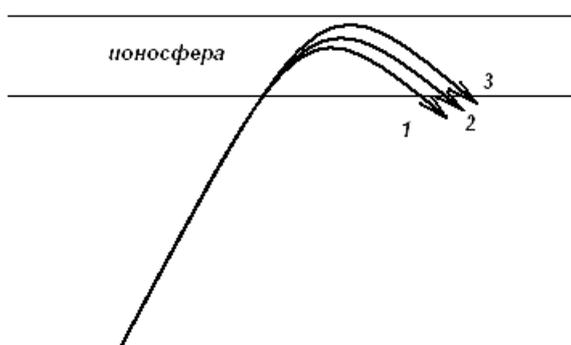


Рисунок 3.37 – Отражение ЭМВ от ионосферы в присутствии постоянного магнитного поля

Наряду с рассмотренными ранее эффектами и явлениями в ферритах в радиотехнике широко используется явление магнитного гистерезиса (от лат. hysteresis – отставание, запаздывание).

Магнитный гистерезис заключается в запаздывании изменения магнитной индукции (B) ферромагнитного вещества по отношению к изменению напряженности внешнего магнитного поля (H). Другими словами состояние текущей намагниченности зависит не только от величины подмагничивающего поля, но и от предыдущего состояния намагниченности феррита (рисунок 3.38).

График $B = f(H)$ на рисунке 3.38 называют петлей гистерезиса. Это явление обусловлено наличием необходимых процессов намагничивания, связанных с неоднородностью внутренних механических напряжений, инородными включениями и другими дефектами структуры феррита. К основным факторам, вызывающим магнитный гистерезис. Относятся: задержка смещения границ магнитных доменов при намагничивании феррита; задержка роста зародышей перемагничивания; необратимые процессы вращения вектора намагниченности. Если величина внешнего поля достаточна для намагничивания до насыщения, то соответствующая петля называется предельной (1– 2 – 3 – 4). Воз-

можно другие петли, при меньших значениях величины поля, лежащие внутри предельной, их называют частными (непредельными) ($1' - 2' - 3' - 4'$). Если перед действием поля феррит был полностью размагничен, то намагничивание происходит по кривой $0 - 1$ называемой основной кривой намагничивания.

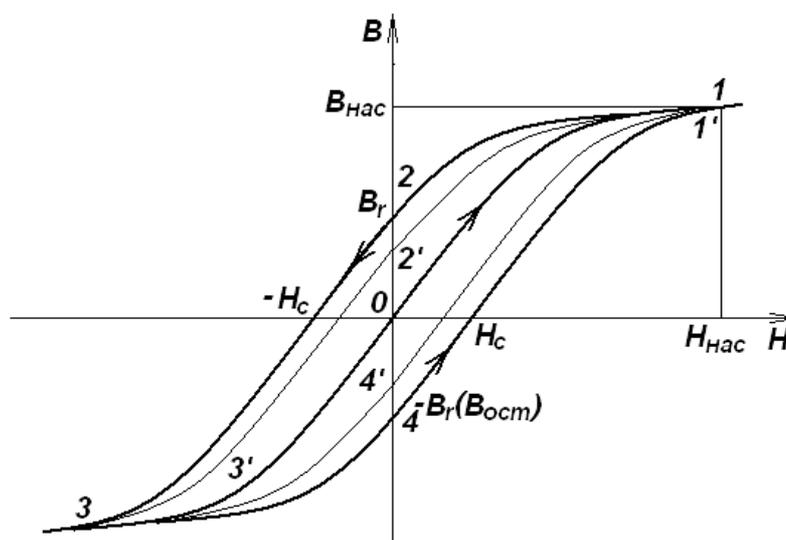


Рисунок 3.38 – Магнитный гистерезис

Наиболее важными характеристиками предельной петли являются: остаточная намагниченность (остаточная индукция) B_r и коэрцитивная сила H_c .

На использовании магнитного гистерезиса основана работа различных переключающих устройств, запоминающих магнитных устройств и СВЧ фазовращателей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое явление называется анизотропией?
2. Какие среды называются гиротропными?
3. Тензор диэлектрической проницаемости ионизированного газа в присутствии постоянного магнитного поля.
4. Основные свойства ферритов.
5. Условия взаимодействия волны с намагниченным ферритом.
6. Ферромагнитный резонанс.
7. Прецессия в ферритах.
8. Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита.
9. Что будет происходить, если на намагниченный феррит воздействует слабое высокочастотное поле?
10. Распространение плоской ЭМВ в продольно намагниченном феррите.
11. Магнитная проницаемость продольно намагниченного феррита.
12. Явления и эффекты в продольно намагниченном феррите. Эффект Фарадея.
13. Распространение плоской ЭМВ в поперечно намагниченном феррите.
14. Явления и эффекты в поперечно намагниченном феррите.
15. Где проявляется в радиотехнике явление гиротропии?

ГЛАВА 4 ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ

4.1 Влияние земной поверхности на распространение радиоволн

На распространение радиоволн существенное влияние оказывает среда, параметры которой необходимо учитывать при организации функционирования радиолиний.

4.1.1 Классификация радиоволн по частотному диапазону

Основные свойства радиоволн зависят, по крайней мере, от двух факторов: частоты ЭМВ и способа их распространения (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Классификация радиоволн по способам распространения

Номер диапазона	Наименование диапазона волн согласно МККР (диапазона частот)	Прежнее наименование диапазона волн	Границы диапазона волн, м	Границы диапазона частот, Гц	Способы распространения волн
1	Декамегаметровые (крайне низкие (КНЧ))	-	$10^8 \dots 10^7$	$3 \dots 3 \cdot 10$	Прямой, земной, тропосферной, ионосферной
2	Мегаметровые (сверхнизкие (СНЧ))	-	$10^7 \dots 10^6$	$3 \cdot 10 \dots 3 \cdot 10^2$	То же
3	Гектокилометровые (инфранизкие (ИНЧ))	-	$10^6 \dots 10^5$	$3 \cdot 10^2 \dots 3 \cdot 10^3$	То же
4	Мириаметровые (очень низкие (ОНЧ))	Сверх- длинные	$10^5 \dots 10^4$	$3 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^4$	То же
5	Километровые (низкие (НЧ))	Длинные	$10^4 \dots 10^3$	$3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^5$	То же
6	Гектометровые (средние (СЧ))	Средние	$10^3 \dots 10^2$	$3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$	То же
7	Декаметровые (высокие (ВЧ))	Короткие	$10^2 \dots 10$	$3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^7$	То же
8	Метровые (очень высокие (ОВЧ))	Метро- вые	$10 \dots 1$	$3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^8$	Преимущ. прямой, земной, тропосферной
9	Дециметровые (ультравысокие (УВЧ))	Децимет- ровые	$1 \dots 10^{-1}$	$3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^9$	Преимущ. прямой и тропосферной
10	Сантиметровые (сверхвысокие (СВЧ))	Санти- метровые	$10^{-1} \dots 10^{-2}$	$3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^{10}$	То же
11	Миллиметровые (крайне высокие (КВЧ))	Милли- метровые	$10^{-2} \dots 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} \dots 3 \cdot 10^{11}$	То же
12	Децимиллиметровые (гипервысокие (ГВЧ))		$10^{-3} \dots 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{12}$	То же

4.1.2 Распространение радиоволн в свободном пространстве и отражение от земной поверхности

4.1.2.1 Распространение радиоволн в свободном пространстве

Напряженность поля ЭМВ в точке В свободного пространства на расстоянии r от источника, помещенного в точку А определяется выражением

$$E_{\text{во}} = \frac{\sqrt{60P_{\Sigma}D}}{r}, \quad (4.1)$$

где P_{Σ} - мощность излучения ПРД антенны (Вт); D – КНД антенны; r - расстояние (АВ), (км).

Если P_{Σ} - в кВт; r – км; тогда

$$E_{\text{во}} = \frac{245\sqrt{P_{\Sigma}D}}{r}. \quad (4.2)$$

Действующее значение напряженности поля

$$E_{\text{вд}} = \frac{E_{\text{во}}}{\sqrt{2}} = \frac{173\sqrt{P_{\Sigma}D}}{r}. \quad (4.3)$$

4.1.2.2 Отражение от ровной земной поверхности

В общем случае земная поверхность для радиоволн является *полупроводником* и ее свойства описывают комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon - j60\sigma\lambda. \quad (4.4)$$

Коэффициенты отражения от ровной (зеркальной) поверхности для вертикально и горизонтально поляризованных волн рассчитываются по формулам (2.101), (2.104) либо задаются графически от угла скольжения $\Phi_0=90^\circ - \varphi_i$ для определенного типа земной поверхности (при $\varepsilon = \text{const}$, $60\sigma\lambda = \text{const}$).

4.1.2.3 Отражение от неровной земной поверхности. Критерий Релея

Для объяснения механизма рассеивания волн высота неровностей шероховатой земной поверхности сравнивается с длиной волны в направлении нормали

$$h_{\text{ш}} \gg \frac{\lambda}{8\cos\varphi_i} = \frac{\lambda}{8\sin\Phi_0}. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) – *критерий Релея*: если неравенство выполняется, то земля считается неровной (шероховатой) и расчет коэффициентов отражения производится с учетом коэффициента зеркальности $0 < K_{\text{зо}} < 1$.

Коэффициенты отражения рассчитываются по формуле

$$\dot{R}_{ш} = K_{зо} \cdot R_{г,в}. \quad (4.6)$$

4.1.2.4 Область, существенная при распространении радиоволн

О.Френель доказал, что при распространении сферической волны все пространство можно представить в виде *отдельных зон*, в каждой из которых фазу поля можно считать одинаковой, причем зоны чередуясь взаимно компенсируют излучения друг друга. Существенное влияние на формирование поля в точке приема оказывает лишь *первая зона Френеля*, которая в пространстве представляет собой эллипсоид вращения, в фокусах которого находятся приемная и передающая антенны. При этом большая ось эллипса практически равна $r = AB$, а малая $CD \approx \sqrt{\lambda \cdot r}$.

В зависимости от высот поднятия антенн h_1, h_2 и длины волны λ различают различные модели радиотрасс (рисунок 4.1).

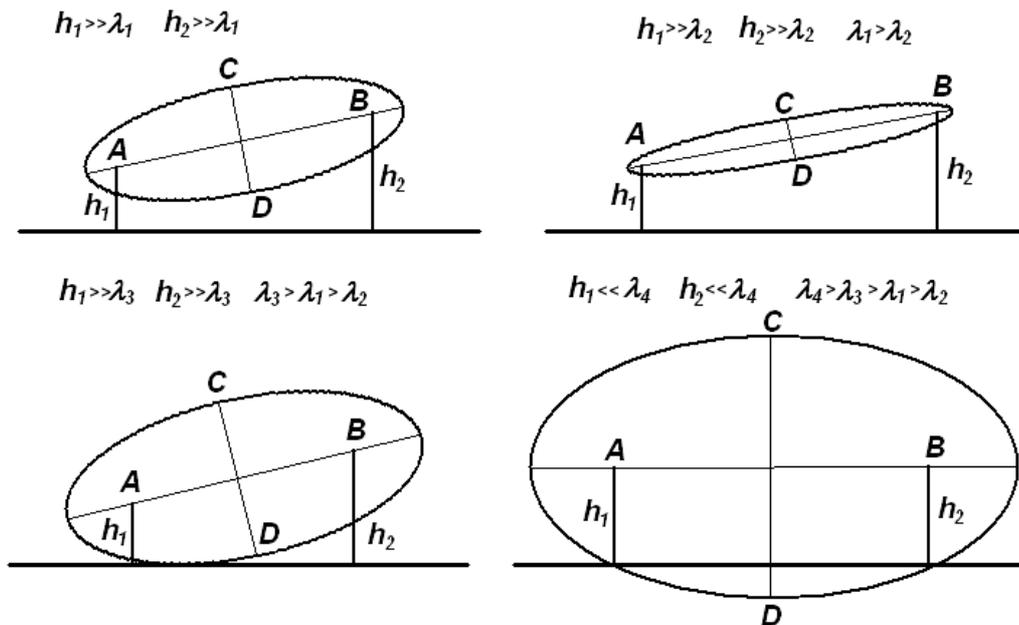


Рисунок 4.1 – Модели радиотрасс

4.1.3 Формула Б.А.Введенского

Для *высоко расположенных* антенн $h_1 \gg \lambda$; $h_2 \gg \lambda$ электромагнитное поле в точке приема складывается из прямой и отраженной от земли волн, т.е. образуется в результате интерференции

$$E_B = E_0 \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda r} h_1 h_2 + \Psi\right)} = E_0 \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos\varphi} = E_0 \cdot F. \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) – *интерференционная формула*; F – интерференционный множитель.

Следствия из (4.7).

1. Напряженность поля имеет интерференционные максимумы равные $E_{B\max} = E_0(1 + R)$, и минимумы величиной $E_{B\min} = E_0(1 - R)$.
2. Количество, положение и величина максимумов и минимумов определяется h_1, h_2, r, R, Ψ при $\lambda = \text{const}$.
3. Во многих практических случаях $\Phi_0 \approx 0^0$ ($\varphi_1 \approx 90^0$), поэтому $R \approx 1, \psi \approx \pi$ для волн любой поляризации.

В этом случае равенство (4.7) преобразуется с учетом $h_1, h_2 \ll r$ и (4.1)

$$E_B = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D}}{r^2} \cdot \frac{4\pi}{\lambda} \cdot h_1 h_2. \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) – формула Б.А.Введенского или квадратичная.

Физический смысл (4.8): при $h_1 \gg \lambda; h_2 \gg \lambda$ (высоко поднятые антенны) суммарная напряженность в точке приема при малых углах скольжения много меньше, чем в свободном пространстве.

Формула может применяться, если выполняется неравенство

$$r \geq \frac{18h_1 h_2}{\lambda}. \quad (4.9)$$

4.1.4 Формула М.В.Шулейкина

Советский ученый М.В.Шулейкин и голландский ученый Ван-дер-Поль предложили независимо друг от друга в 20-х годах прошлого столетия методику расчета напряженности поля в точке приема при $h_1 \ll \lambda; h_2 \ll \lambda$, т.е. при *низко расположенных антеннах*

$$E_B = E_0 \cdot \sqrt{2}F_1 = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D}}{r} \cdot \sqrt{2}F_1. \quad (4.10)$$

Увеличение напряженности в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с E_0 происходит за счет отраженной от земли мощности. Поглощение в полупроводящей поверхности земли учитывается множителем ослабления $F_1 < 1$. На практике F_1 находится с помощью кривых Берроуза, как функция параметра ρ , зависящего от расстояния между антеннами r , комплексной диэлектрической проницаемости и удельной проводимости (рисунок 4.2). Параметр ρ называют численным или приведенным расстоянием.

Параметр ρ , в общем случае комплексный, определяют в соответствии со свойствами земной поверхности $\rho = f(\epsilon, \sigma)$

$$|\dot{\rho}_B| = \frac{\pi r}{\lambda} \left| \frac{\dot{\epsilon} - 1}{\dot{\epsilon}^2} \right|.$$

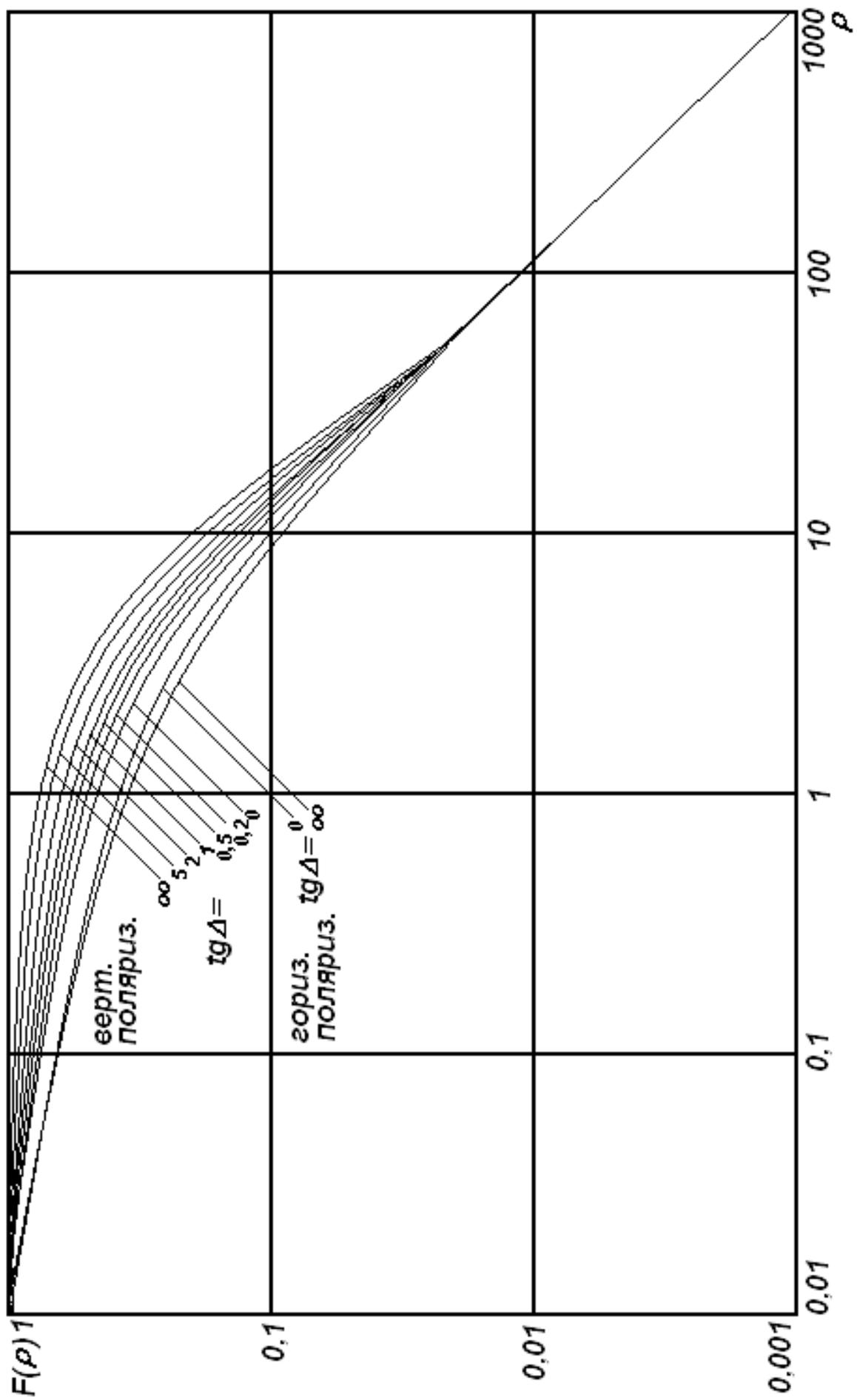


Рисунок 4.2 – Множитель ослабления

Для оценки свойств поверхности вводят величину

$$Q = \frac{\epsilon}{60\sigma\lambda}. \quad (4.11)$$

Если $Q \approx 1$ – земная поверхность полупроводник, то

$$\rho_B \approx \frac{\pi r}{\lambda} / \sqrt{\epsilon^2 + (60\sigma\lambda)^2}. \quad (4.12)$$

Если $Q \gg 1$ – земная поверхность диэлектрик $\rho_B \approx \frac{\pi r}{\lambda \epsilon}$.

Если $Q \ll 1$ – земная поверхность проводник $\rho_B \approx \frac{\pi r}{60\sigma\lambda^2}$.

При отсутствии графиков Берроуза множитель ослабления определяется по приближенной формуле

$$F_1 \approx \frac{4 + 0,3\rho}{4 + \rho + 0,3\rho^2}, \quad (4.13)$$

которая при $\rho > 25$ упрощается $F_1 \approx \frac{1}{\rho}$.

При горизонтальной поляризации эту методику расчета можно применять, только коэффициент отражения вычисляется по формуле

$$\rho_r = \frac{\pi r}{\lambda} \sqrt{(\epsilon - 1)^2 + (60\sigma\lambda)^2}.$$

4.1.5 Учет кривизны земной поверхности при распространении радиоволн

В диапазоне УКВ распространение радиоволн происходит в основном прямыми пространственными волнами в пределах прямой видимости (рисунок 4.3).

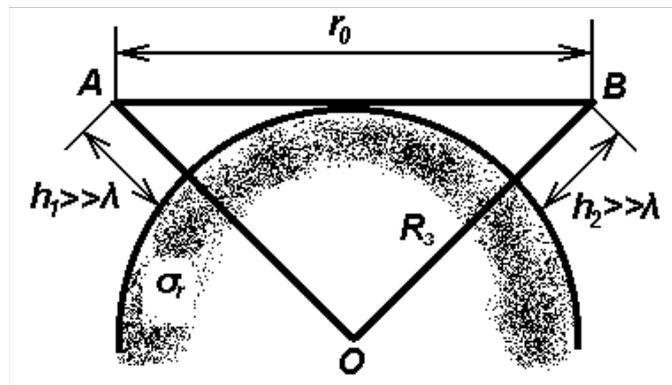


Рисунок 4.3 – Дальность прямой видимости

Дальность прямой видимости, как видно из рисунка

$$r_0 \approx \sqrt{2R_3}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \approx 3,57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad (4.14)$$

где r_0 – измеряется в километрах; h_1, h_2 – высоты поднятия антенн в метрах.

Волны некоторых диапазонов частот могут огибать препятствия на пути распространения, в том числе и сферическую поверхность Земли. Дальность связи при этом увеличивается.

Для расчета выбирают одну из трех моделей радиотрассы (для $h_1 \gg \lambda$; $h_2 \gg \lambda$)

1) при $r < 0,2 r_0$ – поверхность Земли считают плоской, $E_b(r)$ рассчитывают по формуле Введенского.

2) $0,2 r_0 < r < 0,8 r_0$ – учитывают сферичность Земли, но без учета дифракции.

3) $r > 0,8 r_0$ – проводят учет дифракции радиоволн вокруг сферической поверхности Земли.

При $h_1 \ll \lambda$, $h_2 \ll \lambda$ понятие прямой видимости теряет смысл, т.к. область существенная для распространения радиоволн всегда пересекается земной поверхностью, поэтому всегда пользуется моделью Земли и напряженность поля рассчитывают по формуле М.В.Шулейкина.

Учет сферичности Земли в формуле Введенского для радиотрасс, имеющих длину $0,2 r_0 < r < 0,8 r_0$, осуществляют введением приведенных высот приемной и передающей антенн и заменой сферического участка поверхности между антеннами плоским (рисунок 4.4).

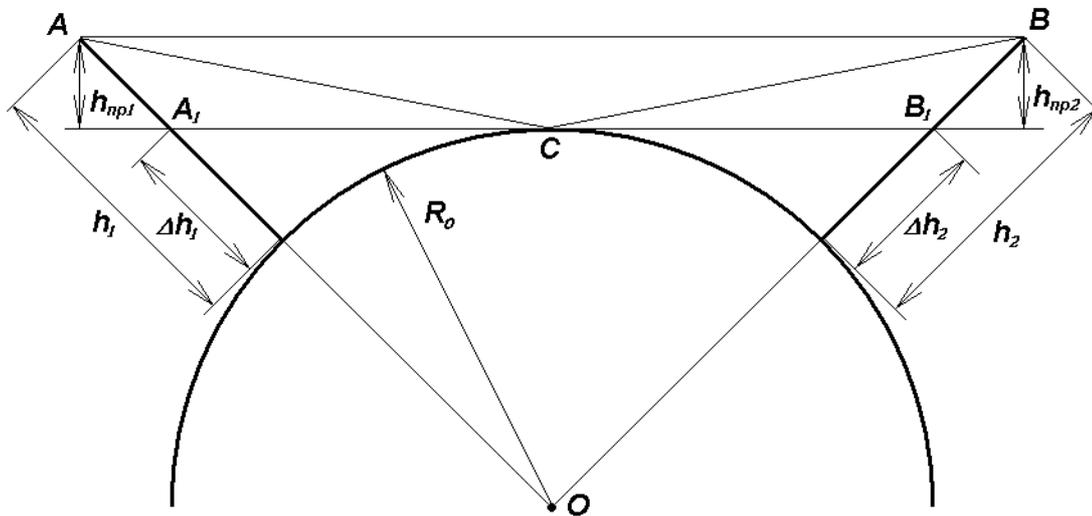


Рисунок 4. 4 – Учет кривизны Земли

Приведенные высоты антенн h_{pp1} , h_{pp2} находятся по формулам

$$h_{pp1} = h_1 - \Delta h_1;$$

$$h_{pp2} = h_2 - \Delta h_2.$$

Из треугольников A_1OC и B_1OC можно найти

$$\Delta h_1 = \frac{(A_1C)^2}{2R_0}; \quad \Delta h_1 = \frac{(B_1C)^2}{2R_0}.$$

При небольших расстояниях

$$A_1C \approx r \frac{h_1}{h_1 + h_2}; \quad B_1C \approx r \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

При значительных расстояниях

$$A_1O_1 \approx r \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}; \quad B_1O_1 \approx r \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}.$$

Если $r > 0,8 r_0$, то распространение радиоволн осуществляется за счет дифракции вокруг сферической поверхности Земли. Методику расчета напряженности поля разработал В.А.Фок:

$$E_{\text{вдиф}} \approx \frac{\sqrt{60P_{\Sigma}D}}{r} \cdot F_{\text{диф}}, \quad (4.15)$$

где $F_{\text{диф}} = V(x) \cdot V(y_1) \cdot V(y_2)$. $V(x)$ – множитель дифракции в точке касания лучом земной поверхности; $V(y_1)$ – множитель дифракции

Сомножители $F_{\text{диф}}$ находятся по графикам (рисунок 4.5) в зависимости от величин

$$x = r \left(\frac{R_3^2 \lambda}{\pi} \right)^{1/3}; \quad y_1 = \frac{2h_1}{\left(\frac{R_3 \lambda^2}{\pi^2} \right)}; \quad y_2 = \frac{2h_2}{\left(\frac{R_3 \lambda^2}{\pi^2} \right)^{1/3}}.$$

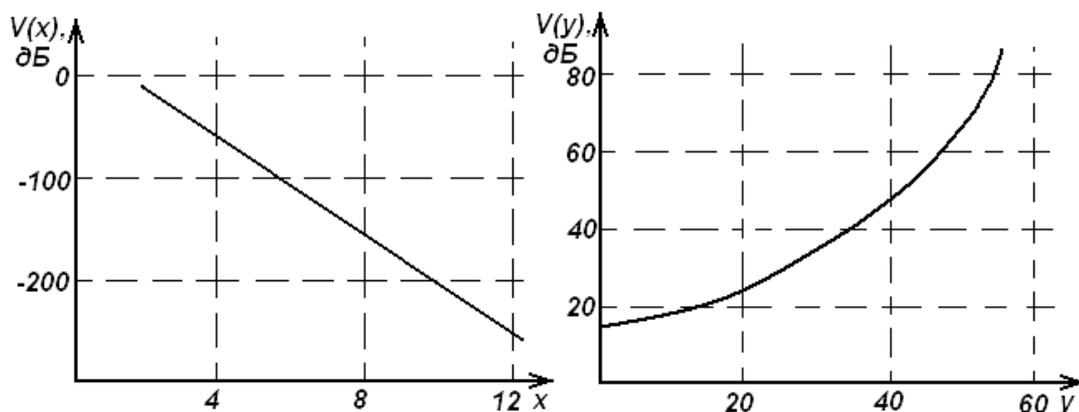


Рисунок 4.5 – К расчету коэффициента дифракционного ослабления

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Классификация радиоволн по частотному диапазону.
2. Каким образом происходит распространение радиоволн в свободном пространстве?
3. Как происходит отражение от ровной земной поверхности?
4. Отражение от неровной земной поверхности. Что такое критерий Релея?
5. Объяснить понятие области, существенная при распространении радиоволн. Какой геометрической фигурой описывается область, существенная при распространении радиоволн?
6. Какие модели радиотрасс в зависимости от высот поднятия антенн h_1 , h_2 и длины волны λ различают?
7. По какой формуле производят расчет напряженности поля при высоко расположенных антеннах?
8. Физический смысл формулы Б.А.Введенского.
9. По какой формуле производят расчет напряженности поля при низко расположенных антеннах?
10. Как осуществляется учет кривизны земной поверхности при распространении радиоволн?
11. Дальность прямой видимости.
12. Какие модели радиотрассы используют при расчете напряженности для $h_1 \gg \lambda$; $h_2 \gg \lambda$?
13. Как осуществляется учет сферичности Земли в формуле Введенского для радиотрасс, имеющих длину $0,2 r_0 < r < 0,8 r_0$?
14. Каким образом производится расчет напряженности поля при распространении радиоволн за счет дифракции вокруг сферической поверхности Земли?

4.2 Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн

Чаще всего приемник или передатчик (и оба сразу) находятся в пределах атмосферы Земли, которая влияет на распространение радиоволн. Степень этого влияния зависит от частоты радиоволны и проявляется в разных по высоте областях атмосферы по-разному.

4.2.1 Состав и строение атмосферы. Тропосфера и ионосфера

Земная поверхность окружена атмосферой, представляющей собой газовую оболочку с массой около $5,15 \cdot 10^{18}$ кг, которая вращается вместе с Землей как единое целое.

Атмосфера – неоднородна по высоте, т.к. изменяется ее плотность. С точки зрения распространения радиоволн атмосферу делят на тропосферу (от земной поверхности до ~20 км), стратосферу (20 км...50 км) и ионосферу (свыше 50 км). Границы между слоями условны и существенно изменяются по высоте в зависимости от времени года, суток, от географического района и других факторов.

Основными физическими параметрами атмосферы являются давление (P), температура (T) и влажность (δ). Во всем диапазоне изменения высоты атмосферы эти параметры не остаются постоянными и, более того, изменяются неравномерно. Примерная зависимость давления газа атмосферы (P_r) и температуры ее (T) от высоты (h) показана на рисунке 4.6.

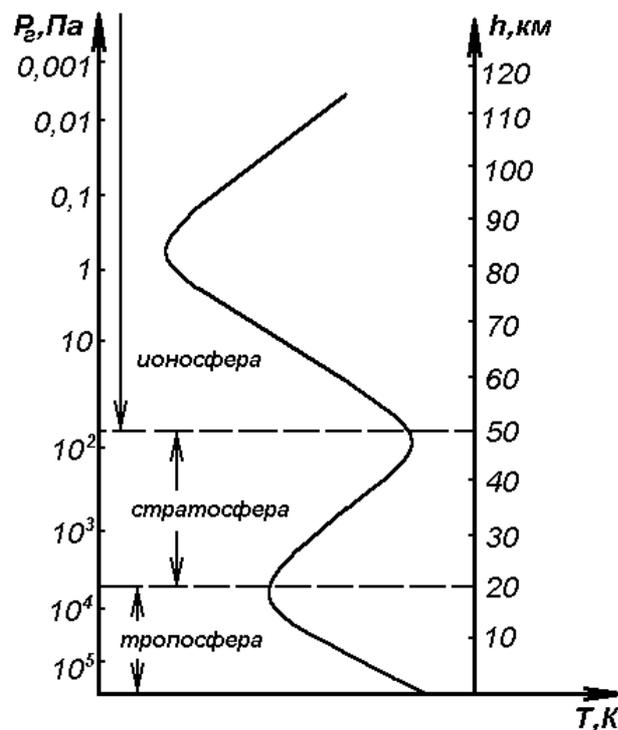


Рисунок 4.6 – Зависимость давления и температуры в атмосфере от высоты

Из нее следует, что наиболее сложной она оказывается для температуры. Заметим к сказанному, что влажность с возрастанием высоты резко убывает. В качестве эталона атмосферы принята так называемая международная стандартная атмосфера (МСА).

Газовый состав атмосферы, как и физические параметры реальной атмосферы, изменяется с увеличением высоты. Хотя атмосфера состоит преимущественно из азота (примерно 78%), кислорода (примерно 21%), постоянных (аргон, углекислый газ, неон и пр.) и переменных (в основном водяной пар) компонентов (всего около 1%), азот и кислород в нижних слоях атмосферы (до 100 км) находятся в молекулярном состоянии (N_2 , O_2), а в верхних (свыше 100 км) — как в молекулярном, так и атомарном (N , O) состоянии. В тропосфере находятся также пылевые частицы с размерами $10^{-2} \dots 10^{-7}$ см. Такая высотная структура газового состояния атмосферы способствует ее ионизации, т.е. образованию в атмосфере на высоте свыше 50 км ионов и свободных электронов, определяющих физическое содержание ионосферы. Основным источником ионизации атмосферы является Солнце. Другими источниками являются звезды и космическое излучение. В тропосфере находятся также пылевые частицы с размерами $10^{-2} \dots 10^{-7}$ см.

Другой областью атмосферы, существенно влияющей на распространение радиоволн, является ионосфера – верхний слой атмосферы примерно от 50 км и выше. В ионосфере находится большое количество ионов и свободных электронов, образующихся за счет ионизирующего действия Солнца, космического излучения, космической пыли, метеоритов.

4.2.2 Распространение радиоволн в тропосфере

4.2.2.1 Состав и строение тропосферы

Тропосферу МСА называют нормальной и принимают ее параметры равными:

- давление у земли $P_0 = 1013$ гПа;
- температура у поверхности земли $T = 288$ К (15°C);
- относительная влажность $S = 60\%$
- относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$;
- удельная проводимость $\sigma_T \approx 0$.

Относительную диэлектрическую проницаемость можно определить по формуле

$$\epsilon_T = 1 + \frac{155,2 \cdot 10^{-8}}{T} \left(p + \frac{4810 P_{\text{п}}}{T} \right), \quad (4.16)$$

где p – давление, $P_{\text{п}}$ – парциальное давление водяного пара, в Паскалях; T – абсолютная температура, в Кельвинах.

Коэффициент преломления

$$n_T = \sqrt{\epsilon_T \mu_T} = \sqrt{\epsilon_T} = \sqrt{1 + (\epsilon - 1)} \approx 1 + \frac{\epsilon - 1}{2},$$

т.к. $(\epsilon - 1) \ll 1$

$$n_T = 1 + \frac{77,6 \cdot 10^{-8}}{T} \left(p + \frac{4810 P_n}{T} \right). \quad (4.17)$$

Поскольку n_T незначительно отличается от единицы вместо показателя преломления пользуются индексом преломления (приведенным показателем тропосферы) $N_T = (n_T - 1) \cdot 10^6$,

$$N_T = \frac{77,6}{T} \left(p + \frac{4810 P_n}{T} \right) \cdot 10^{-2}. \quad (4.18)$$

Для нормальной тропосферы МСА

$$N_T = N_{от} e^{-0,136h}, \quad (4.19)$$

где $N_{от}$ – индекс преломления у земли (260...460).

Из-за турбулентных явлений N_T изменяется нерегулярным образом, поэтому обычно его измеряют с помощью радиозондов или с помощью самолетных радиорефрактометров, с целью выявления закономерностей изменения (рисунок 4.7).

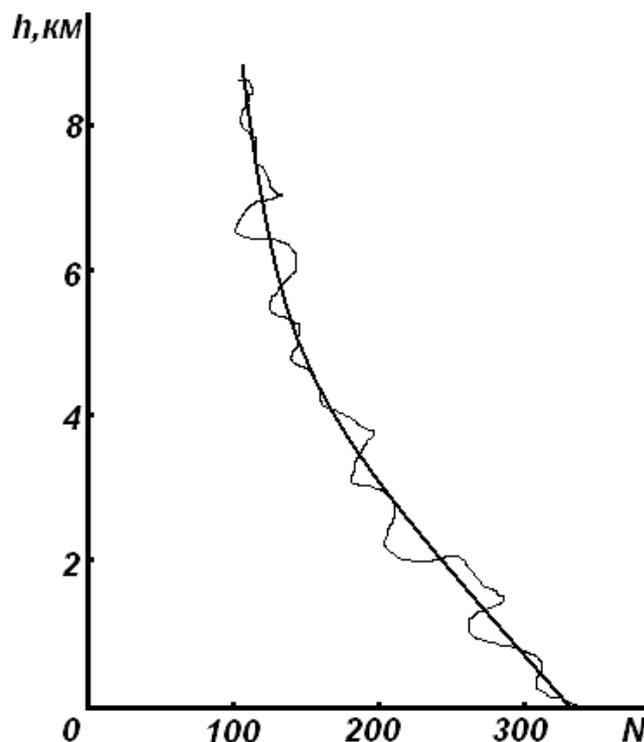


Рисунок 4.7 – Зависимость индекса преломления от высоты

Измерения позволили создать упрощенную электрическую модель тропосферы, в соответствии с которой зависимость индекса преломления от высоты определяется: средним профилем изменения N с высотой; слоистыми неоднородностями; турбулентными флуктуациями.

4.2.2.2. Распространение волн в тропосфере. Тропосферная рефракция

Пусть ЭМВ распространяется в тропосфере под некоторым углом $0^\circ < \theta < 90^\circ$ относительно горизонта. В этом случае разные элементы фазового фронта радиоволны находятся на различных высотах. Поскольку показатель (индекс) преломления изменяется с высотой, то различные элементы фазового фронта будут иметь разные фазовые скорости.

В результате этого фазовый фронт волны изменит свое положение относительно первоначального, то есть будет наблюдаться искривление траектории распространения радиоволны, т.к. различные участки фазового фронта в один и тот же момент времени находятся в слоях тропосферы с различным $n_T = \sqrt{\epsilon_T}$ (рисунок 4.8).

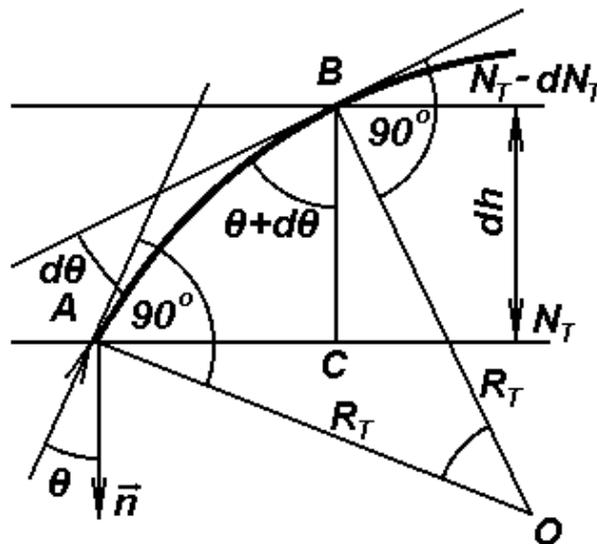


Рисунок 4.8 – Возникновение тропосферной рефракции

Это явление называется тропосферной рефракцией. При нормальном падении ($\theta = 0^\circ$) явление рефракции не наблюдается. Оценить степень рефракции можно радиусом кривизны траектории радиоволны.

Выделим в тропосфере слой толщиной dh . Пренебрегая разностью в длинах дуги \widehat{ab} и хорды $[ab]$ из рисунка 4.8 получим

$$R_T \approx \frac{ab}{d\theta}. \quad (4.20)$$

Из треугольника abc следует, что $ab \approx \frac{dh}{\cos(\theta + d\theta)}$, где $(\theta + d\theta)$ – угол падения радиоволны при выходе из слоя тропосферы. Подставив значение ab в выражение (4.20) найдем, что

$$R_{\tau} \approx \frac{dh}{d\theta \cos \theta}. \quad (4.21)$$

Из второго закона Снеллиуса следует, что

$$n_{\tau} \sin \theta = (n_{\tau} + dn_{\tau}) \sin(\theta + d\theta). \quad (4.22)$$

Преобразуем выражение (4.22):

$$(n_{\tau} + dn_{\tau}) \sin(\theta + d\theta) = n_{\tau} \sin \theta \cos d\theta + n_{\tau} \cos \theta \sin d\theta + dn_{\tau} \sin \theta \cos d\theta + dn_{\tau} \cos \theta \sin d\theta.$$

В силу малости dn_{τ} и $d\theta$ $\cos d\theta \approx 1$; $\sin d\theta \approx d\theta$, тогда

$$n_{\tau} \sin \theta = n_{\tau} \cdot \sin \theta + d\theta \cdot n_{\tau} \cdot \cos \theta + dn_{\tau} \cdot \sin \theta,$$

с учетом чего:

$$d\theta \cos \theta = -\frac{dn_{\tau}}{n_{\tau}} \sin \theta. \quad (4.23)$$

Получаем из (4.21), учитывая (4.23)

$$R_{\tau} \approx - \frac{n_{\tau}}{\frac{dn_{\tau}}{dh} \sin \theta}. \quad (4.24)$$

Поскольку $n_{\tau} \approx 1$, $N_{\tau} = (n_{\tau} - 1) \cdot 10^6$, то окончательно имеем

$$R_{\tau} \approx - \frac{10^6}{\frac{dN_{\tau}}{dh} \sin \theta}. \quad (4.25)$$

Для расчета напряженности поля в точке приема целесообразнее пользоваться теми же формулами, что и для случая прямолинейного распространения радиоволн (4.10), (4.15). Криволинейную траекторию радиоволны в таком случае сводят к прямолинейной, вводя эквивалентный радиус Земли R_{39}

$$R_{39} = \frac{R_3}{1 + R_3 \cdot \frac{dn_{\tau}}{dh}} = \frac{R_3}{1 + R_3 \cdot \frac{dN_{\tau}}{dh} \cdot 10^{-6}}. \quad (4.26)$$

При такой замене выпрямленный эквивалентный луч проходит над земным шаром эквивалентного радиуса на той же высоте, что и криволинейный луч над реальной земной поверхностью (рисунок 4.9).

Вводят $K = \frac{R_{3э}}{R_3}$, тогда дальность прямой видимости

$$r_0 = \sqrt{2KR_3}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (4.27)$$

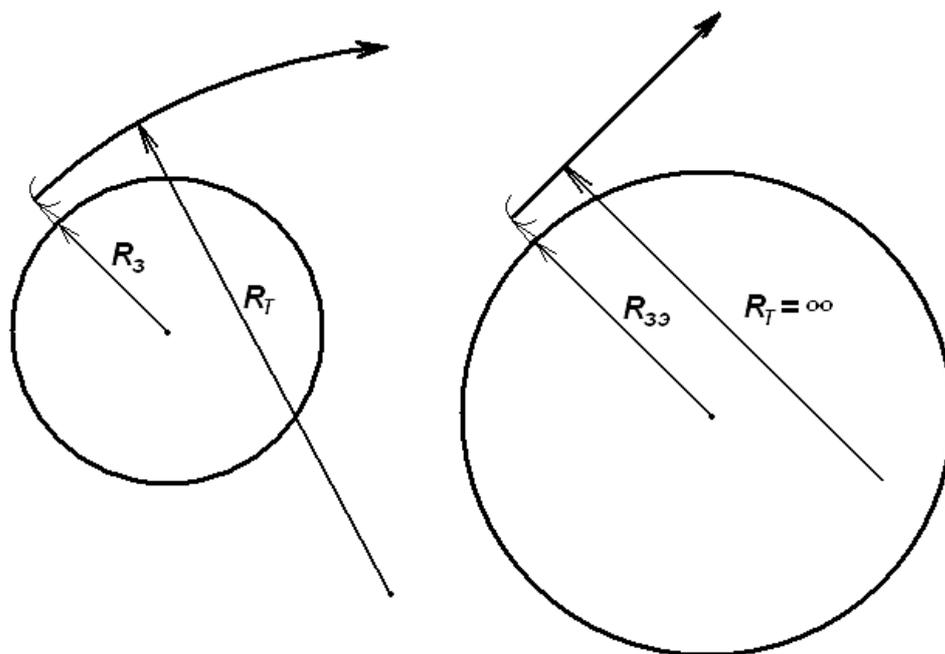


Рисунок 4.9 – Эквивалентный радиус Земли

В зависимости от величины градиента $\frac{dn_T}{dh} \left(\frac{dN_T}{dh} \right)$ различают следующие виды рефракции (рисунок 4.10):

1) отрицательная (а)

$$\frac{dN_T}{dh} > 0 \left(\frac{dn}{dh} > 0 \right); R_T < 0; R_{3э} < R_3.$$

2) нулевая (б)

$$\frac{dN_T}{dh} = 0 \left(\frac{dn}{dh} = 0 \right); R_T = \infty; R_{3э} = R_3. \quad (4.28)$$

3) пониженная положительная (в)

$$\frac{dN_T}{dh} < -0,04 \left(\frac{dn}{dh} < -4 \cdot 10^{-5} \right); R_T > R_{ТН}; R_3 < R_{3э} < 4/3R_3.$$

4) нормальная (г)

$$\frac{dN_T}{dh} = -0,04(\text{км})^{-1} \left(\frac{dn}{dh} = -4 \cdot 10^{-5} (\text{км})^{-1} \right); R_T = R_{\text{TH}} = 4R_3 = 25000 \text{ км.} \quad (4.29)$$

$$R_{39} = 4/3R_3; \quad r_0 = 4,12(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2});$$

5) повышенная положительная (д)

$$-0,04 < \frac{dN_T}{dh} < -0,157 \left(-4 \cdot 10^{-5} < \frac{dn}{dh} < -15,7 \cdot 10^{-5} \right);$$

$$0,25R_{\text{TM}} < R_T < R_{\text{TH}}; \quad 4/3R_3 < R_{39} < \infty.$$

6) критическая (е)

$$\frac{dN_T}{dh} = -0,157(\text{км})^{-1}; \left(\frac{dn}{dh} = -15,7 \cdot 10^{-5} (\text{км})^{-1} \right); R_T = R_3; R_{39} = \infty.$$

7) сверхфракция (ж)

$$\frac{dN_T}{dh} > -0,157(\text{км})^{-1}; \left(\frac{dn}{dh} > -15,7 \cdot 10^{-5} (\text{км})^{-1} \right);$$

$$R_T < 1/4R_{\text{TH}} = R_3; \quad R_{39} < 0.$$

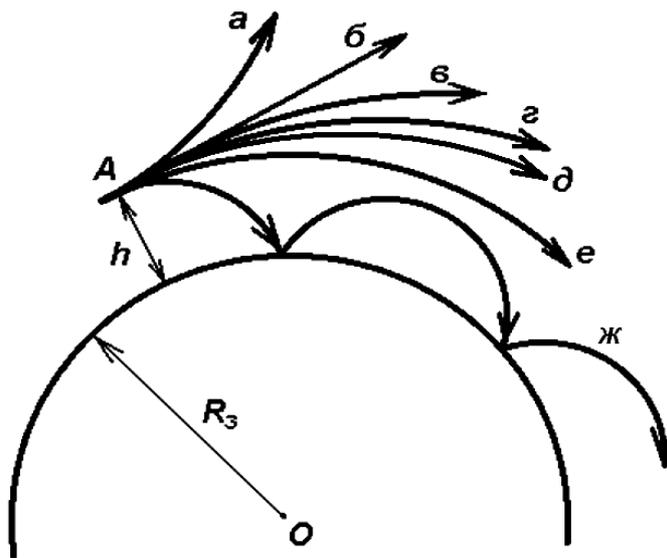


Рисунок 4.10 – Случаи тропосферной рефракции

4.2.3 Распространение радиоволн в ионосфере

4.2.3.1 Структура ионосферы

Ионосфера с точки зрения распространения радиоволн является средой анизотропной, так как представляет собой ионизированный газ (плазму), находящийся в постоянном магнитном поле Земли. Вследствие этого влияние ионосферы на распространение радиоволн многообразно и зависит от частоты радиоволны, вида ее поляризации, направления распространения.

Кроме тропосферы другой областью атмосферы, существенно влияющей на распространение радиоволн, является ионосфера – верхний слой атмосферы примерно от 50 км и выше. В ионосфере находится большое количество ионов и свободных электронов, образующихся за счет ионизирующего действия Солнца, космического излучения, космической пыли, метеоритов. Степень ионизации характеризуется электронной плотностью N_e , [1/м³]. В ионосфере протекает и рекомбинация, характеризующаяся числом столкновений электронов с ионами (скоростью рекомбинации) ν , [1/с]. Экспериментальными исследованиями установлено, что в ионосфере существует несколько различных по интенсивности ионизации областей, называемых слоями. Условно слои в порядке возрастания высоты называют D, E, F₁, F₂ (в дневные часы), ночью D исчезает, а вместо F₁ и F₂ образуется один слой F (рисунок 4.11).

Ионизация и рекомбинация определяют электромагнитные параметры ионосферы

$$\epsilon_n = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_e}{v^2 + \omega_{рв}^2}; \quad (4.30)$$

$$\sigma_n = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_e \cdot \nu}{v^2 + \omega_{рв}^2}, \quad (4.31)$$

где $\omega_{рв}$ – частота радиоволны.

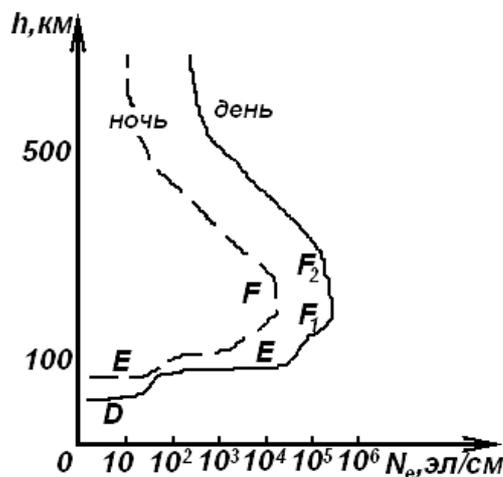


Рисунок 4.11 – Зависимость электронной концентрации от высоты слоя ионосферы

Кроме того ионосфера находится в магнитном поле Земли, а потому является средой гиротропной (частный случай анизотропии). Собственная частота ионизированного газа (частота Ленгмюра)

$$\omega_0 = e \sqrt{\frac{N_e}{m_e \cdot \epsilon_0}}; \quad (4.32)$$

$$f_0 = \sqrt{80,8 N_e}. \quad (4.33)$$

При $\omega_{pв} \gg \nu$

$$\epsilon_u = 1 - 80,8 \frac{N_e}{f_{pв}^2} = 1 - \frac{f_0^2}{f_{pв}^2}; \quad \sigma_n = 7,17 \cdot 10^{-4} \frac{N_e \cdot \nu}{f_{pв}}; \quad \alpha_u \approx 0,136 \frac{N_e \cdot \nu}{f_{pв}^2}. \quad (4.34)$$

При $\omega_{pв} \ll \nu$

$$\epsilon_u = 1 - \frac{f_0^2}{\nu^2}; \quad \sigma_n = 7,17 \cdot 10^{-4} \frac{N_e}{\nu}; \quad \alpha_u = 3,34 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{N_e f_{pв}}{\nu}}. \quad (4.35)$$

4.2.3.2 Влияние ионосферы на распространение радиоволн

Ионосфера, как среда, в которой распространяются радиоволны, обладает *особыми свойствами* по сравнению со свободным пространством или тропосферой:

1) $\epsilon_u < \epsilon$, т.к. $\sigma \neq 0$, т.е. возникает ток проводимости $\bar{J}_{пр} = \sigma_u \bar{E}$, $\bar{J}_{пр}$ и $J_{см}$, сдвинуты на 90° по фазе, поэтому $\bar{J}_{полн} = \bar{J}_{пр} + \bar{J}_{см} > \bar{J}_{см}$, что эквивалентно уменьшению ϵ .

2) $\epsilon_u, \sigma_u, \alpha_u = f(N_e, \nu)$

так как N_e, ν с высотой изменяются, то $\epsilon_u, \sigma_u, \alpha_u = f(h)$, т.е. ионосфера по высоте неоднородна.

3) $\epsilon_u, \sigma_u, \alpha_u = f(\omega_{pв})$

Ионосфера – среда диспергирующая с $\uparrow \omega_{pв} \epsilon_u \rightarrow 1; \sigma_u \rightarrow 0; \alpha_u \rightarrow 0$ при $f_{pв} > 100$ МГц $\epsilon_u \approx 1; \sigma_u \approx 0; \alpha_u \approx 0 \Rightarrow$ ионосфера прозрачна.

4) Для некоторой частоты $f_{pв} = f_0 = \sqrt{80,8 N_e}$ существуют высоты, где $\epsilon_u = 0$.

5) Для частот $f_{pв} < f_0$ на некоторых высотах $\epsilon_u < 0$, т.е. $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_u \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0}$ – мнимое число. Ионосфера для ЭМВ с такой частотой реактивная среда, радиоволна отражается.

6) α_u изменяется с изменением N_e, ν , поэтому радиоволны по-разному поглощаются на разных высотах, в разное время года и суток.

7)
$$n_u = \sqrt{\epsilon_u \mu_0} = \sqrt{\epsilon_u},$$

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_u}} = \frac{1}{n_u}, \quad n_u = f(N_e),$$

$$n_u, V_{\phi} = f(h), \quad N_e = f(h).$$

8) Так как ионосфера находится в постоянном магнитном поле Земли с $|\overline{H}_{03}| \approx 40$ А/м, то электроны в ионосфере движутся по спиральной траектории. При некоторой частоте $f_{рв} \approx 1,4$ МГц ($\lambda = 214$ м) наблюдается явление гиромагнитного резонанса (α_u резко возрастает). При этом право- и левополяризованные волны по-разному поглощаются ионосферой.

4.2.3.3 Отражение радиоволн от ионосферы

Для определения условий отражения радиоволны представим ионосферу в виде слоев с $\epsilon_u = \text{const}$ в пределах каждого слоя и скачком изменяющимся на границе слоев (рисунок 4.12).

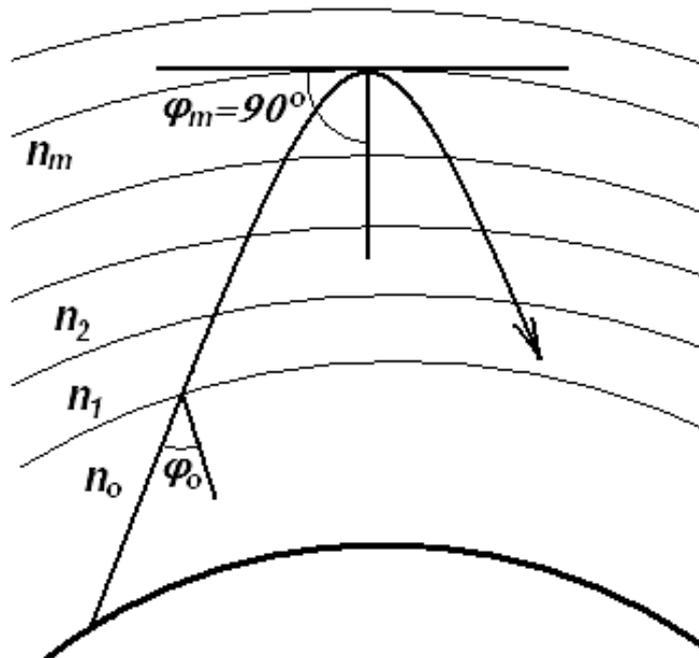


Рисунок 4.12 – Отражение радиоволны от ионосферы.

Согласно 2-го закона Снеллиуса:

$$n_0 \cdot \sin \varphi_0 = n \cdot \sin \varphi, = \dots = n_m \cdot \sin \varphi_m .$$

Поскольку у поверхности Земли $n_0 = 1$, а условием отражения от m -го слоя является $\varphi_m = 90^0$, то

$$\sin \varphi_0 = n_m = \sqrt{\epsilon_{um}} = \sqrt{1 - 80,8 \frac{N_{em}}{f_{pв}^2}}. \quad (4.36)$$

Выражение (4.36) является условием отражения волны от m -го слоя ионосферы с электронной концентрацией N_{em} . Физически оно означает, что $\varphi > \varphi_0$ волна будет отражаться от нижележащих слоев ионосферы, при $\varphi < \varphi_0$ волна пройдет через m -ый слой.

Очевидно, что существует критический угол $\varphi_{кр}$

$$\sin \varphi_{кр} = \sqrt{1 - 80,8 \frac{N_{e\max}}{f_{pв}^2}}, \quad (4.37)$$

Физический смысл формулы (4.37):

1) радиоволна с $f_{pв}$, падающая на ионосферу под углом $\varphi_0 > \varphi_{кр}$, будет от нее отражаться; та же волна при падении под углом $\varphi_0 < \varphi_{кр}$ через ионосферу пройдет;

2) при увеличении $N_{e\max}$ и уменьшении $f_{pв}$ величина $\varphi_{кр}$ уменьшается и наоборот;

3) для слоя с $N_{e\max}$ существует критическая частота радиоволны для каждого значения угла падения $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ ($f_{кр} \varphi_0$) минимальное значение $f_{кр} \varphi_0$ имеет при $\varphi_0 = 0$ (т.е. при вертикальном падении на ионосферу) при увеличении угла падения значение критической частоты увеличивается

$$f_{кр} \varphi_0 = \sqrt{80,8 N_{e\max} / \cos^2 \varphi_0} = f_{0\max} \sec \varphi_0, \quad (4.38)$$

где $f_{0\max} = \sqrt{80,8 N_{e\max}}$ - критическая частота отражения ЭМВ от слоя с максимальной электронной концентрацией при нормальном падении на ионосферу. Формулу (4.38) называют законом секанса.

Для регулярной ионосферы $f_{0\max} = 37...43$ МГц ($\lambda = 7...8$ м).

Следствия из выражения (4.38):

1) $f_{pв} \leq f_{кр} \varphi_0$, то волна будет отражаться от ионосферы при падении под данным углом;

$f_{pв} \leq f_{кр} \varphi_0$ - ионосфера прозрачна при падении волны под углом φ_0 .

2) при увеличении угла φ_0 $f_{кр} \varphi_0$ увеличивается, т.е. радиоволны с большей частотой, чем при меньшем угле, будут отражаться от слоя ионосферы с $N_{e\max}$.

Состояние ионосферы может быть нерегулярным, при котором изменение ее электрических параметров происходит случайным образом. Причинами нерегулярности ионосферы, как правило, являются вспышки на поверхности Солнца и возмущения в его короне. Они обуславливают такие нерегулярные явления, как ионосферно-магнитные бури (ИМБ) и внезапные вспышки поглощения (ВВП).

ИМБ возникают в результате того, что при вспышках на Солнце и возмущениях в его короне резко возрастает поток заряженных частиц, которые,

двигаясь к Земле вдоль силовых линии ее магнитного поля, не только ионизируют атмосферу, но и значительно разогревают ее. Последнее ведет к увеличению объема атмосферы и, как следствие, к заметному снижению уровня концентрации электронов в слоях F_1 и F_2 ионосферы. Это, в свою очередь, уменьшает значение f_0 в формуле (4.33) и $f_{кр}$ в выражении (4.38), что нередко приводит к нарушению условий отражения радиоволн от этих слоев ионосферы и прекращению работы радиолинии, использующей, например, ионосферные волны декаметрового диапазона.

ВВП обязаны ультрафиолетовому излучению Солнца, интенсивность которого резко возрастает при вспышках на Солнце и возмущениях в его короне. Обладая большой проникающей способностью, ультрафиолетовые волны достигают слоя ионосферы, повышая в нем уровень концентрации электронов. Это не только увеличивает значения f_0 и $f_{кр}$ слоя, но и его удельную электрическую проводимость $\sigma_{и}$. Увеличение f_0 и $f_{кр}$ обеспечивает отражение от слоя D гектометровых волн, не отражавшихся от него при регулярном состоянии слоя, а увеличение $\sigma_{и}$ повышает потери энергии декаметровых волн, проходящих через слой D, вследствие недостаточности его уровня концентрации электронов для их отражения. Таким образом, ВВП нередко становятся причиной нарушения работы радиолиний, использующих ионосферные волны декаметрового диапазона.

Наличие в ионосфере спорадического (возникающего случайно, но достаточно часто) слоя E_s также оказывает влияние на распространение радиоволн: по причине того, что его ионизация может иметь разную плотность, он вызывает то существенное поглощение декаметровых волн и нарушение работы радиолиний на них, то отражение метровых волн и значительное увеличение дальности их распространения ионосферной волной.

Особенности распространения ионосферных волн. Как уже отмечалось ранее, распространение радиоволн в ионосфере в зависимости от ее уровня концентрации электронов сопровождается их отражением от ионосферы или прохождением через нее. При этом в зависимости от частоты (длины) радиоволны отражение от ионосферы может происходить в результате постепенного преломления ее в электрически неоднородной ($\epsilon_{гн0} < \epsilon_{гн1} < \epsilon_{гн2} \dots < \epsilon_{гнm}$) области отражающего слоя или зеркально, т.е. без проникновения в нее. В первом случае происходит ослабление энергии радиоволны по мере ее распространения в слое, во втором — этой потери нет.

Зеркально отражаются от нижних границ слоя D (днем) и слоя E (ночью) радиоволны метрического и километрового диапазонов. Дальность распространения радиоволн этих диапазонов может достигать десятки тысяч километров за счет многократного отражения от ионосферы и поверхности Земли.

Метровые и более короткие волны от регулярной ионосферы не отражаются: попадая на нее, они проходят через ионосферу в космическое пространство. В нерегулярной ионосфере возможно отражение волн при $\lambda = 5 \dots 10$ м.

Метровые волны регулярно распространяются на расстояния свыше 1000 км и, в случае применения специальной аппаратуры, могут быть уверенно приняты. Волны короче метровых не могут распространяться ионосферным путем. Возможность сверхдальнего распространения метровых волн обуславливают следующие явления, происходящие в ионосфере:

- а) повышение электронной плотности слоя F в годы максимума солнечной активности;
- б) появление спорадического слоя E_s;
- в) рассеяние радиоволн на неоднородностях ионосферы.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Состав и строение атмосферы.
2. Тропосфера и ионосфера.
3. Зависимость давления и температуры в атмосфере от высоты.
4. Состав и строение тропосферы.
5. Международная стандартная атмосфера. Какую тропосферу МСА называют нормальной?
6. Относительная диэлектрическая проницаемость тропосферы.
7. Коэффициент преломления тропосферы.
8. Индекс преломления тропосферы.
9. Причина возникновения тропосферной рефракции.
10. Эквивалентный радиус Земли.
11. Виды тропосферной рефракции.
12. Строение ионосферы.
13. Зависимость электронной концентрации от высоты слоя ионосферы.
14. Собственная частота ионизированного газа (частота Ленгмюра).
15. Влияние ионосферы на распространение радиоволн
16. Отражение радиоволн от ионосферы.
17. Критический угол.
18. Физический смысл формулы для критического угла.
19. Особенности распространения ионосферных волн.

4.3 Распространение радиоволн различных частотных диапазонов

4.3.1 Распространение мириаметровых (сверхдлинных) и километро- вых (длинных) радиоволн

4.3.1.1 Распространение мириаметровых радиоволн

Наиболее длинноволновыми из всего диапазона электромагнитных волн (радиоволн) являются мириаметровые и километровые волны. Сравнимость их длины волны с размерами любых объектов (в том числе и самой Земли) на пути их распространения приводит к сильной дифракции волн этих диапазонов, что и обуславливает особенности их распространения.

Кроме того, волны этих диапазонов крайне незначительно поглощаются поверхностью Земли и, вследствие этого, хорошо проникают вглубь поверхности.

К мириаметровым или сверхдлинным волнам (СДВ) относятся волны с $\lambda=10000\dots100000$ м (с частотами $f=30\dots3$ кГц). Для СДВ земная поверхность (суша, море) является хорошим проводником (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Проводимость земной поверхности

Вид земной поверхности	Длина волны, м			
	20000	200	2	0,02
Сухая почва, $\left(\frac{J}{J_{\text{см}}}\right)_{\text{max}}$	300	3	0,03	$3 \cdot 10^{-4}$
Морская вода, $\left(\frac{J}{J_{\text{см}}}\right)_{\text{max}}$	$60 \cdot 10^3$	600	6	0,06

Вследствие этого потери этого диапазона крайне незначительны. Именно этим объясняется способность СДВ распространяться земной волной, проникая в толщу поверхности. Кроме этого длина СДВ соизмерима с размером стрелы сегмента, что способствует распространению СДВ на глобальные расстояния (вокруг Земного шара) за счет дифракции (рисунок 4.13).

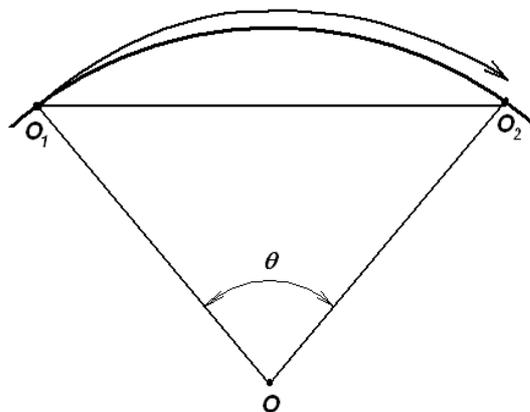


Рисунок 4.13 – Дифракция СДВ вокруг Земли

Размеры неровностей земной поверхности в диапазоне СДВ гораздо меньше длины волны, поэтому земная поверхность является гладкой, что также уменьшает потери энергии волны. СДВ распространяется также и ионосферной волной, отражаясь от слоя D днем и слоя E ночью, критические частоты которых гораздо выше частот диапазона СДВ. ($f_{крD} \approx 100$ кГц; $f_{крE} \approx 0,8$ МГц). На частотах СДВ диапазона отражение происходит от самой нижней границы этих слоев без проникновения их в толщу ионосферы из-за большой разности диэлектрических проницаемостей ϵ_T и ϵ_H .

Кроме этого для волн левого вращения распространяющихся в плазме ионосферы вдоль силовых линий магнитного поля Земли диэлектрическая проницаемость при нормальном падении на ионосферу не обеспечивает полного отражения от ионосферы; аналогично это происходит и при наклонном падении. Поэтому левополяризованная компонента волны, распространяющейся вдоль магнитного поля Земли, при частотах, соответствующих СДВ, пройдет через ионосферу. Одно из явлений, возникающих в результате этого, – это так называемые "светящиеся атмосферерики". В диапазоне СДВ (главным образом, на частотах 1...10 кГц), наблюдаются сигналы, порождаемые грозовыми разрядами, которые в звуковом канале приемников вызывают свист с частотой, заметно возрастающей. Такие сигналы распространяются из одного полушария Земли в другое, вдоль силовых линий магнитного поля Земли; последнее, как можно показать, направляет перенос энергии (рисунок 4.14).

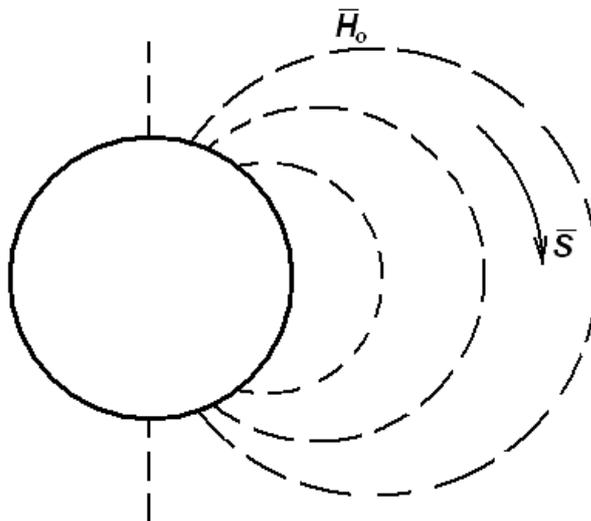


Рисунок 4.14 – Направление распространения помех от грозовых разрядов в СДВ

Время запаздывания сигнала составляет 2...3 с, что говорит о большой длине пути, пройденного волной.

Антенные системы, используемые в диапазоне СДВ, в силу естественных причин ($L_a \ll \lambda$) являются ненаправленными, поэтому радиоволны падают на ионосферу под различными углами, что приводит к разной кратности отра-

жения радиоволн от ионосферы. В результате этого распространение СДВ происходит подобно распространению ЭМВ в своеобразном волноводе, образованном земной поверхностью и нижней границей ионосферы. Как правило антенные системы, используемые в диапазоне СДВ, формируют поле вертикальной поляризации. В этих условиях критическая длина волны для ионосферного волновода определяется высотой нижней границы ионосферы, которая примерно находится на высоте 100 км ($\lambda_{кр} \approx 100$ км). Оптимальные длины волн для распространения в таком волноводе $\lambda = 25 \dots 35$ км. Фазовая скорость радиоволны в сферическом волноводе, как и в обычном, больше скорости света, однако отличие фазовой скорости от скорости света небольшое.

Таким образом, мириаметровые волны распространяются как земной, так и ионосферной волнами. Земная волна без заметного ослабления распространяется на дальности до 3000 км. Ионосферная волна появляется, начиная с расстояний 400 км, а на расстоянии более 1000 км ее амплитуда становится сравнимой с амплитудой земной волны. На дальность более 3000 км СДВ распространяются только ионосферной волной путем многократного отражения от ионосферы и Земли (рисунок 4.15).

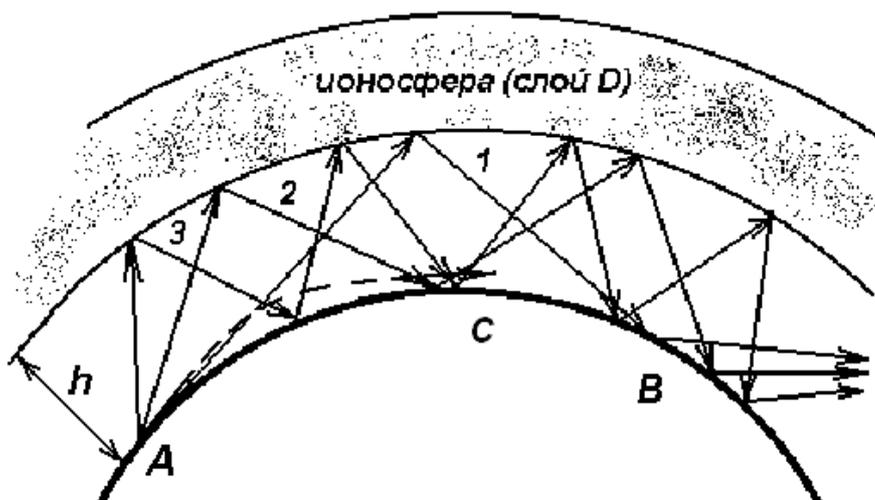


Рисунок 4.15 – Распространение мириаметровых волн

Подобные механизмы приводят к интерференции пространственной и поверхностной волн в точке С и двух пространственных, выполнивших разное число отражений (В). Это приводит к замираниям сигнала. Однако в диапазоне СДВ замирания настолько медленны (в течение нескольких часов и даже дней) и неглубоки по амплитуде ($< 10\%$), что их можно не учитывать.

Условия распространения СДВ исследуют, наблюдая за таким мощным естественным их источником, как грозы. Грозовой разряд представляет собой импульс тока, содержащий колебания различных частот – от сотен Герц до десятков МГц. Основная часть энергии импульса грозового разряда приходится на диапазон СДВ. Колебания от места возникновения распространяются во все

стороны, причем волны различной длины при распространении испытывают различное поглощение и приходят с различными фазами. В результате импульс, пришедший на значительное расстояние от места разряда искажения. По искажению импульса судят и свойствах сферического волновода "Земля-ионосфера".

Как уже отмечалось СДВ используются для организации глобальных РНС ("Омега") импульсного и фазо-временного принципа действия.

Из-за очень малых потерь в поверхности земли СДВ используют для связи с подземными и подводными объектами (например, подводными лодками в погруженном положении).

4.3.1.2 Распространение километровых радиоволн

Километровые или длинные волны (ДВ) распространяются механизмами схожими с мириаметровыми. В этом диапазоне токи проводимости также преобладают над токами смещения, но не так значительно как в СДВ. В результате этого ДВ проникают на значительно меньшую глубину в поверхность (несколько метров) и потери их выше, хотя и не существенны. Земной волной длинные волны могут распространяться на дальности 1500...2000 км без заметного ослабления.

Расчет напряженности поля в точке приема на расстояниях до 500...600 км производят по формуле Шулейкина, а для больших расстояний – с учетом дифракции.

ДВ также могут распространяться ионосферной волной, отражаясь от тех же слоев Д (днем) и Е (ночью). При этом особенностей распространения по сравнению с СДВ практически не наблюдается. Следует только отметить, что период замираний уменьшается до нескольких десятков минут-часов, а глубина их возрастает до 30%, что также не оказывает существенного влияния на организацию радиосвязи. Отличие фазовой скорости волны в сферическом волноводе от скорости света еще меньше, чем у волн СДВ.

Диапазон километровых волн подвержен помехам. Наиболее существенными являются атмосферные и промышленные помехи. Атмосферные помехи, как и в мириаметровом диапазоне, вызываются в основном грозами. На слух эти помехи воспринимаются как свисты, шорохи и трески, при сильных грозах значительно мешающие приему. Разряды молний имеют две стадии: предразряд и основной разряд. Предразряд излучает колебания в диапазонах ДВ, СВ и даже КВ, а основной в диапазоне СДВ.

В диапазоне километровых волн сильные помехи радиоприему могут создать близко расположенные электрические машины: мощные двигатели, генераторы, машинные преобразователи и прочее.

Для ослабления действия таких помех необходимо применять направленные антенны, что в диапазоне ДВ является большой проблемой.

В диапазоне километровых волн наблюдается явление антипода, когда напряженность поля в точке диаметрально противоположной относительно

центра Земли увеличивается. Это происходит за счет образования стоячей волны в сферическом волноводе.

На расстояниях больших 500...600 км напряженность электрического поля в точке приема рассчитывают по эмпирической формуле Остина:

$$E_m = \frac{245\sqrt{PD}}{r} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} e^{-\frac{0,0014}{0,6}r}, \quad (4.39)$$

где E_m - амплитуда напряженности электрического поля, мВ/м; P – мощность передатчика, кВт; D – КНД; r – дальность, км; Θ – центральный угол, рад; λ – длина рабочей волны, км.

Километровые волны применяются для дальней радионавигации, передачи метеосводок и радиотелеграфной связи.

Особенности распространения мириаметровых и километровых волн:

а) сила сигнала слабо меняется в течение суток и в течение времени года и не подвержена случайным изменениям.

б) для связи на большие расстояния (более 1000км) необходимо иметь мощные передатчики (сотни – тысячи кВт) и громоздкие антенны (в СДВ – антенные поля).

в) наличие значительных атмосферных и промышленных помех.

д) невозможность размещения большого количества каналов связи и использования широкополосных сигналов.

4.3.2 Распространение гектометровых (средних), декаметровых (коротких) и ультракоротких волн

4.3.2.1 Распространение гектометровых радиоволн

К гектометровым (средним) волнам относятся радиоволны длиной от 100 до 1000 м (частоты 3...0,3 МГц). Средние волны используются главным образом для вещания. Они могут распространяться как земные и как ионосферные волны.

Напряженность электрического поля земных волн определяют для малых расстояний по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля, а для больших расстояний – по законам дифракции. Средние волны испытывают значительное поглощение в полупроводящей поверхности Земли, дальность распространения земной волны ограничена расстоянием 500...700 км. Все явления и особенности распространения земных волн, рассмотренные ранее проявляются именно на средних волнах. На большие расстояния радиоволны распространяются ионосферной волной. Рассмотрим основные особенности ионосферного распространения средних волн.

В ночное время гектометровые волны распространяются путем отражения от слоя E ионосферы, электронная плотность которого оказывается доста-

точной для этого. В дневные часы на пути распространения волны расположен слой D, чрезвычайно сильно поглощающий средние волны. Поэтому при обычных мощностях передатчиков напряженность электрического полч недостаточна для приема, и в дневные часы распространение средних волн происходит практически только земной волной на сравнительно небольшие расстояния (порядка 1000 км).

В диапазоне средних волн более длинные волны испытывают меньше поглощение, и напряженность электрического поля ионосферной волны больше на более длинных волнах. Поглощение увеличивается в летние месяцы и уменьшается в зимние месяцы. Ионосферные возмущения не влияют на распространение средних волн, так как слой E мало нарушается во время ионосферно-магнитных бурь.

В ночные часы на некотором расстоянии от передатчика возможен приход одновременно пространственной и поверхностной волн, как показано на рисунке 4.16 (точка В), причем длина пути пространственной волны меняется с изменением электронной плотности ионосферы.

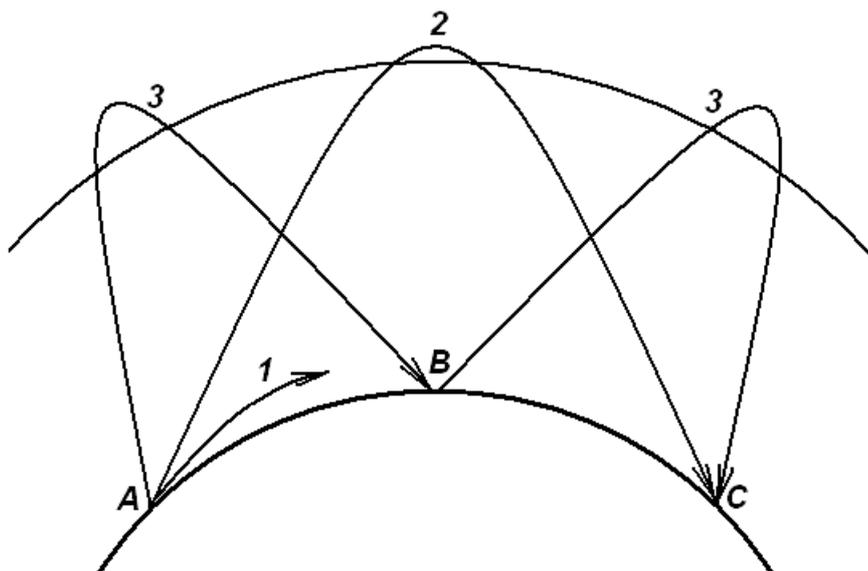


Рисунок 4.16 – Пояснение причины ближних и дальних замираний гектометровых волн: 1 – земная волна; 2 – волна, отразившаяся от ионосферы один раз; 3 – волна, отразившаяся от ионосферы дважды

Изменение разности фаз этих волн приводит к колебанию напряженности электрического поля, называемому ближним замиранием поля.

На значительное расстояние от передатчика (точка С) могут прийти волны путем одного и двух отражений от ионосферы. Изменение разности фаз этих двух волн также приводит к колебанию напряженности электрического поля, называемому дальним замиранием поля.

Для борьбы с замираниями на передающем конце линии связи применяются антенны, у которых максимум диаграммы направленности "прижат" к

земной поверхности. При такой диаграмме направленности зона ближних замираний удаляется от передатчика, а на больших расстояниях поле волны, пришедшей путем двух отражений, оказывается ослабленным.

4.3.2.2 Распространение декаметровых радиоволн

К декаметровым (коротким) волнам относятся радиоволны длиной от 100 до 10 м (частоты 3...30 МГц). Преимуществом работы на коротких волнах по сравнению с работой на более длинных волнах является то, что в этом диапазоне можно создать направленные антенны. Короткие волны могут распространяться как земные и как ионосферные.

Ранее было показано, что с повышением частоты сильно возрастает поглощение волн в полупроводящей поверхности Земли. Поэтому при обычных мощностях передатчика земные волны декаметрового диапазона распространяются на расстояния, не превышающие нескольких десятков километров. Расчет напряженности электрического поля для поверхностной волны можно проводить в зависимости от высоты расположения антенн над поверхностью Земли по интерференционной формуле или по формуле Шулекина – Ван-дер-Поля.

Ионосферной волной короткие волны могут распространяться на многие тысячи километров, причем для этого не требуется передатчиков большой мощности. Поэтому в настоящее время короткие волны используются главным образом для связи и вещания на большие расстояния.

Декаметровые волны распространяются на дальние расстояния путем отражения от ионосферы и поверхности Земли. Такой способ распространения называют скачковым (рисунок 4.17) и характеризуют расстоянием скачка r_{c1} , r_{c2}, \dots , числом скачков n , углами выхода и прихода Θ_{01} и Θ_{02} , максимальной применимой частотой (МПЧ) и наименьшей применимой частотой (НПЧ). Расстояние скачка зависит от высоты отражающего слоя, рабочей частоты и диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости; оно меняется в зависимости от времени года, сезона и уровня солнечной активности. В среднем максимальное расстояние скачка принимают равным: при отражении от слоя F_2 – 4000 км, при отражении от слоя F_1 – 3000 км, при отражении от слоя E – 2000 км. Максимальное расстояние скачка имеет место при направлении излучения волны по касательной к горизонту, однако у реальных антенн максимум излучения направлен под некоторым углом к горизонту, что приводит к уменьшению максимального расстояния скачка.

Если ионосфера однородна в горизонтальном направлении, то $\Theta_{01} = \Theta_{02}$ и траектория волны симметрична, обычно излучение происходит в некотором спектре углов, так как ширина диаграммы направленности коротковолновых антенн в вертикальной плоскости составляет $10 \dots 15^\circ$. Минимальное расстояние скачка для которого выполняется условие отражения при $\Theta_0 = \Theta_{окр}$, называют расстоянием зоны молчания (r_{c1}). Углы выхода больше $\Theta_{окр}$ дают ряд траекторий, причем оптимальные условия радиосвязи выполняются, если угол при-

хода волны на заданное расстояние соответствует углу максимального излучения антенны (луч 2 на рисунке 4.17).

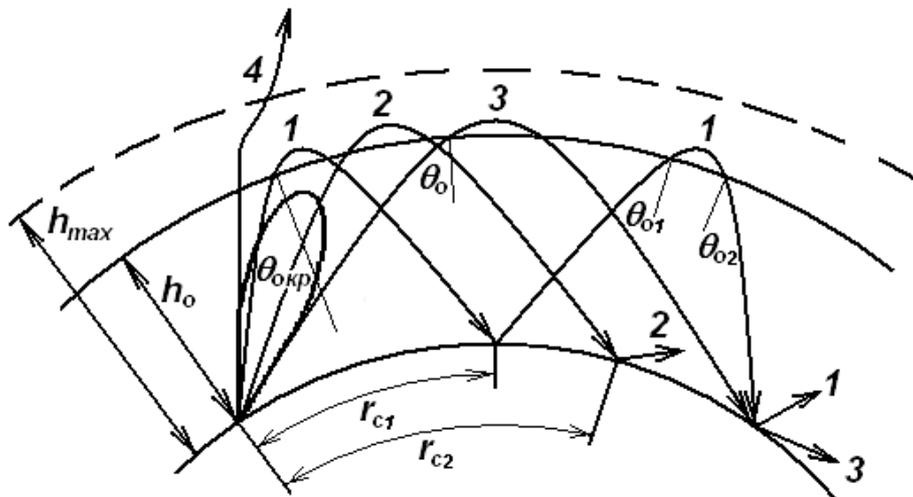


Рисунок 4.17 – Схема распространения коротких волн на большие расстояния: 1, 2 – волны, распространяющиеся путем двух отражений от ионосферы; 3 – волна, распространяющаяся путем одного отражения от ионосферы; 4 – волна, рабочая частота которой больше максимально допустимой

Чтобы волна могла быть принята на определенном расстоянии от передатчика, во-первых, должно выполняться условие отражения волны от ионосферы и, во-вторых, напряженность электрического поля полезного сигнала в данном месте должна превышать уровень помех. Эти два условия ограничивают диапазон применимых рабочих частот.

Для отражения волны необходимо, чтобы рабочая частота была не выше значения $f_{кр}$. Из этого условия выбирают максимальную применимую частоту (МПЧ), являющуюся верхней границей рабочего диапазона для данного расстояния.

Второе условие ограничивает рабочий диапазон снизу: чем ниже рабочая частота (в пределах коротковолнового диапазона), тем сильнее поглощение волны в ионосфере. Наименьшую применимую частоту (НПЧ) определяют из условия, что при данной мощности передатчика напряженность электрического поля сигнала должна превышать уровень шумов, а следовательно, поглощение сигнала в слоях ионосферы должно быть не больше допустимого.

МПЧ и НПЧ определяются путем возвратно-наклонного зондирования ионосферы и по его результатам издаются ионосферные карты на каждый месяц следующего за текущим года для каждых 2-х часов московского времени в виде месячных прогнозов МПЧ.

Электронная плотность ионосферы меняется в течение суток и в течение года. Значит, меняются и границы рабочего диапазона, что приводит к необходимости изменения рабочей длины волны в течение суток. Для каждой радиотрассы на каждый месяц составляют графики суточного хода МПЧ и НПЧ, в соответствии с которыми осуществляют перестройку рабочей частоты (рисунок 4.18).

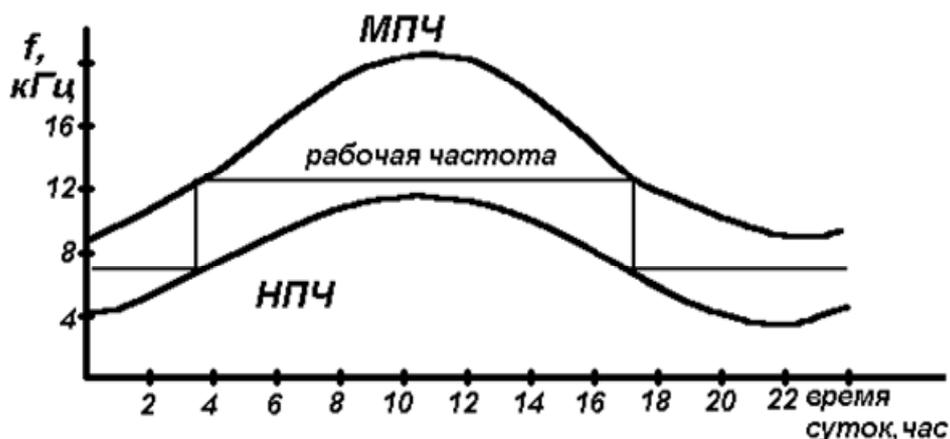


Рисунок 4.18 – Суточный график МПЧ и НПЧ

Днем работают на волнах 10...25 м, а ночью – на волнах 35...100 м. Понятно, что необходимость менять длину волны и каждый раз правильно выбрать ее усложняет как конструкцию станции, так и работу оператора. Ионосфера имеет несколько максимумов ионизации, вблизи которых могут отражаться радиоволны. В зависимости от рабочей частоты, угла Θ_0 и состояния ионосферы отражение может происходить в той или иной области ионосферы; при этом возможны различные траектории распространения волн.

Прием коротких радиоволн всегда сопровождается изменением во времени уровня принимаемого сигнала, причем это изменение носит случайный характер. Такое явление называют замираниями сигнала.

Очевидно, что при наличии замираний можно говорить только о вероятности появления того или иного уровня сигнала. Различают быстрые и медленные замирания сигнала.

Основной причиной быстрых замираний сигнала является многолучевое распространение радиоволн. Чаще всего причиной замираний служит приход в точку приема двух лучей, распространяющихся путем одного и двух отражений от ионосферы, как показано на рисунке 4.19. Поскольку два луча проходят различные пути, фазы их неодинаковы. Изменения электронной плотности, непрерывно происходящие в ионосфере, приводят к изменению длины пути каждого из лучей, а, следовательно, и к изменению разности фаз между лучами. Для изменения фазы волны на 180° достаточно, чтобы длина пути изменилась на $\lambda/2$, т.е. на 5...50 м. Такие незначительные изменения длины пути могут происходить непрерывно, поэтому колебания напряженности электрического поля в диапазоне коротких волн являются частыми и глубокими.

Помимо этого, замирания сигнала вызываются рассеянием радиоволн на неоднородностях ионосферы и интерференцией рассеянных волн. Интерференция обыкновенной и необыкновенной составляющих магниторасщепленной волны также приводит к замираниям.

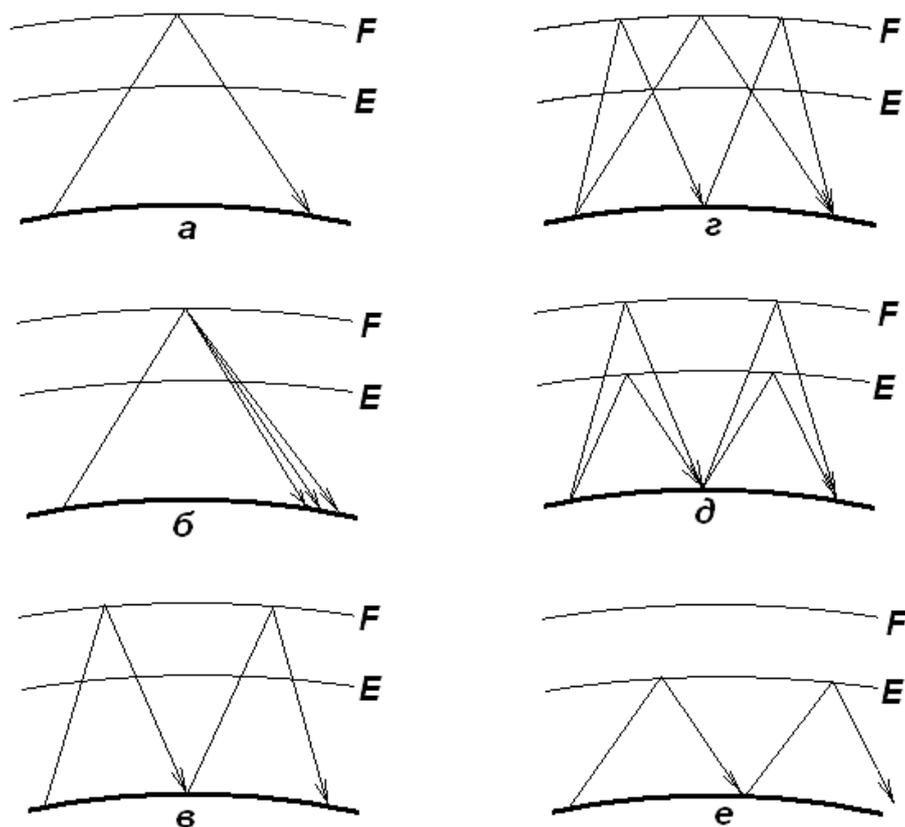


Рисунок 4.19 – Механизмы распространения коротких волн

Кроме интерференционных замираний сигнала, на коротких волнах имеют место поляризационные замирания. Причиной поляризационных замираний является поворот плоскости поляризации волны при распространении ее в направлении силовых линий магнитного поля Земли.

Направление вектора напряженности электрического поля относительно приемной антенны непрерывно меняется, что приводит к колебаниям э.д.с., наводимой в антенне.

Особенности распространения радиоволн декаметрового диапазона:

- а) ограниченность частотного диапазона;
- б) наличие зон молчания;
- в) наличие явления радиоэха;
- д) наличие явления наземного рассеяния радиоволн (эффект Кабанова);
- е) возникновение замираний, которые более глубокие и более быстрые, чем в диапазоне гектометровых волн.

4.3.2.3 Распространение ультракоротких радиоволн

Ультракороткими называются радиоволны короче 10 м (частота выше 30 МГц). Со стороны более низких частот диапазон УКВ примыкает к коротким волнам, а со стороны высоких частот граничит с длинными инфракрасными лучами. Граница УКВ определена тем, что на этих волнах, как правило, не может быть удовлетворено условие отражения радиоволн от ионосферы. Диапазон УКВ можно разбить на четыре поддиапазона: метровый – от 10 до 1 м (30...300 МГц), дециметровый – от 1 до 10 см (300...3000 МГц), сантиметровый – от 10 до 1 см (3000...30000 МГц) и миллиметровый – короче 1 см (выше 30000 мГц). Каждый из поддиапазонов находит применение в технике. Так, диапазон метровых волн используется в телевидении и частотно-модулированном вещании, а в последнее время – для осуществления радиосвязи на дальние расстояния. Диапазоны дециметровых и сантиметровых волн используются в телевидении, радиолокации и многоканальной связи. Диапазон миллиметровых волн еще только осваивается.

Каждый из поддиапазонов имеет свои особенности распространения, но основные положения свойственны всему диапазону УК. На УКВ, как правило, применяют направленные антенны, поднятые над поверхностью Земли на значительную высоту в масштабе длины волны. Поверхность Земли нельзя считать ровной, имеет место рассеяние радиоволн при отражении. Сантиметровые волны испытывают поглощение в тропосфере.

Встречающиеся в практике случаи распространения УКВ удобно классифицировать следующим образом:

1. Распространение УКВ на расстояния, значительно меньше расстояния прямой видимости: $0,2 r_0$ (до 5...6 км), когда можно пренебречь сферичность Земли и считать ее плоской. Особенности поля волны описываются интерференционной формулой.

2. Распространение УКВ на расстояния, не превышающие расстояние прямой видимости: $0,2 r_0 \dots 0,8 r_0$ (до 50...60 км) или ненамного превышающие это расстояние (до 80...100 км). На этих расстояниях существенное ослабляющее действие оказывает сферичность Земли. Тропосферная рефракция большей частью улучшает условия приема, но в то же время приводит к возникновению замираний.

3. Распространение УКВ на те же расстояния, но в гористой местности или в большом городе, когда на пути волны имеются значительные препятствия.

4. Распространение УКВ (сантиметровых и дециметровых) на большие расстояния – до 200...1000 км путем рассеяния на неоднородностях тропосферы.

5. Распространение УКВ (метровых) на расстояния свыше 1000 км путем отражения от ионосферы и рассеяния на ее неоднородностях.

Метровые волны (МВ) распространяются земной и прямой волнами, а при определенных условиях тропосферной и ионосферной. Распространение земной волной происходит в пределах прямой видимости.

Дальность распространения МВ в пределах прямой видимости определяется высотой подъема приемной и передающей антенн по формуле (4.14)

$$r_0 = 3,57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}),$$

а с учетом рефракции

$$r_0 = 4,12(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad (4.40)$$

где r_0 – дальность распространения МВ (км), h_1, h_2 – высоты приемной и передающей антенн (м).

Если радиотрасса закрыта препятствиями, может наблюдаться увеличение дальности распространения за счет дифракции волн на препятствии (рисунок 4.20).

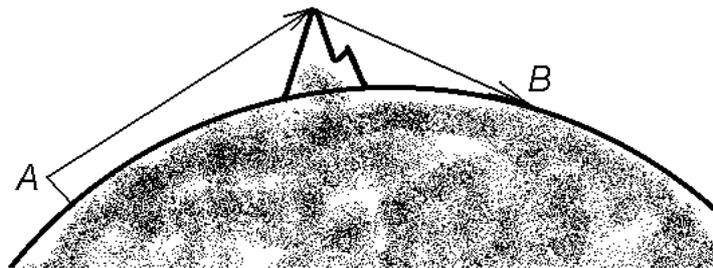


Рисунок 4.20 – Увеличение дальности распространения МВ за счет дифракции на препятствии

Тропосферное распространение МВ может вызываться рефракцией их в тропосфере и рассеянием на тропосферных неоднородностях турбулентного происхождения. Как правило, тропосферными волнами распространяются МВ с $\lambda = 1 \dots 2$ м на дальности до 1000 км.

Ионосферное распространение МВ возможно при повышении электронной концентрации ионосферы в годы максимальной активности Солнца (при появлении спорадического слоя E_s) и при наличии неоднородностей в ионосфере. Наибольшие дальности распространения достигаются при $\lambda = 5 \dots 10$ м до тысяч км. Метровые волны при распространении ионосферной и тропосферной волной подвержены быстрым замираниям.

Способы распространения дециметровых волн (ДМВ) те же, что и МВ, но имеется ряд отличий. На распространение ДМВ земной волной существенное влияние оказывает растительный покров Земли и ее влажность. Условия возникновения тропосферных ДМВ улучшаются, а ионосферных волн, наоборот, ухудшаются.

Сантиметровые волны (СМВ) могут распространяться земной, прямой и тропосферной волнами. Влияние растительного покрова, неровностей и влажности земной поверхности еще более заметно, чем на ДМВ. При распространении СМВ, вдоль гладкой (водной) поверхности наблюдаются интерференционные замирания.

Для СМВ характерно их ослабление в гидрометеорах (дождь, снег, туман и т.д.) и практически отсутствие поглощения волн в газах. Ослабление СМВ в гидрометеорах увеличивается с укорочением волн.

Миллиметровые волны (ММВ), распространяясь преимущественно прямыми волнами, испытывают поглощение в газах и парах воды тропосферы. Поглощение ММВ как в газах, так и в парах воды носит резонансный характер. Минимальное поглощение («окна прозрачности») наблюдаются при $\lambda = 8,6$ мм, $\lambda = 3,5$ мм, $\lambda = 2,4$ мм, $\lambda = 1,4$ мм.

Миллиметровые волны испытывают рефракцию в тропосфере тем сильнее, чем меньше длина волны.

4.3.2.4 Распространение радиоволн оптического диапазона

Оптические волны занимают интервал частот $f = 3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^{15}$ Гц и делятся на инфракрасные, световые и ультрафиолетовые. Рассмотрим распространение инфракрасных (ИК) и световых волн, нашедших наибольшее применение в военном деле.

К оптическому диапазону относятся электромагнитные колебания с длиной волны 0,39...0,75 мкм, воспринимаемые человеческим глазом. К инфракрасному диапазону относятся волны длиной 0,75...1000 мкм, занимающие промежуточное положение между оптическими и миллиметровыми волнами. Инфракрасный диапазон делят на три области: ближнее инфракрасное излучение – от 0,75 до 1,5 мкм, среднее – от 1,5 до 5,6 мкм и дальнее – от 5,6 до 1000 мкм. Границы спектров оптических, инфракрасных и миллиметровых волн взаимно перекрываются.

Инфракрасные и световые волны обладают рядом достоинств:

- а) способностью фокусироваться в узкий пучок с высокой концентрацией энергии;
- б) большой полосой частот при передаче информации;
- в) высокой стабильностью колебаний, генерируемых лазерами (ОКГ – передатчиками световых и ИК волн).

ИК системы обладают высокой разрешающей способностью. Первые советские искусственные спутники Земли обнаруживались и регистрировались наряду с другими методами по их ИК излучению.

При использовании оптического и ИК диапазонов для целей связи преимуществом является возможность передачи большого количества информации, поскольку спектр этих диапазонов достигает 10 МГц. Системы связи оказываются помехозащищенными благодаря применению узкополосных фильт-

ров и большой направленности излучения. Предполагается, что такие системы могут быть использованы также для космической связи и локации.

Особенности распространения инфракрасных и световых волн в атмосфере следующие.

А) Проходя через земную атмосферу, инфракрасные и световые волны ослабляются в результате рассеяния и поглощения в ней. В атмосфере, свободной от облаков и тумана, наблюдается рассеяние на молекулах газов, водяных парах и дымке, а также селективное (избирательное по частоте) поглощение в газах атмосферы и водяных парах. При наличии в атмосфере облаков и тумана, кроме упомянутых выше причин ослабления волн, появляются тепловые потери и рассеяние волн каплями воды или частицами льда. Пары воды, углекислый газ, озон и другие примеси селективно ослабляют инфракрасные волны. Ослабление световых волн незначительно. Облака и туман ослабляют и рассеивают как инфракрасные, так и световые волны, причем это наблюдается при примерном совпадении размеров капель с длиной волны.

Б) Вследствие того, что атмосфера является средой оптически неоднородной, траектории распространения в ней инфракрасных световых волн искривляются. Различают астрономическую и геодезическую (земную) рефракцию. Наиболее важной является геодезическая рефракция – явление преломления лучей, идущих от источников, находящихся в пределах атмосферы. Геодезическая рефракция инфракрасных и световых волн может иметь те же виды, что и для радиоволн.

В) Излучающие и отражающие инфракрасные и световые волны светила и небесные тела, если они не являются полезными с точки зрения обнаружения и определения их координат, создают помехи при приеме сигналов на этих волнах. Различают естественные и искусственные источники помех. Наиболее мощными естественными источниками помех являются Солнце и частицы атмосферы. Другим источником помех является Земля, которая как излучает, так и отражает инфракрасные волны. Искусственные источники помех могут быть промышленными (крупные заводы, ТЭЦ, АЭС, города и т.п.) и специально организованными для борьбы с оптическими системами противника (ложные тепловые цели, станции постановки оптических помех и т.п.).

Далее рассмотрим более подробно некоторые из этих особенностей.

1. Оптические и ИК волны испытывают ослабление при прохождении атмосферы, особенно если она насыщена водяными парами и пылью. Подобно радиоволнам, эти волны рефрагируют в неоднородной атмосфере. Излучающие и отражающие тела, если они не являются целью, создают фон, мешающий работе системы и проявляющийся как вредный шум.

Полное ослабление света в атмосфере обусловлено несколькими факторами. Различают ослабление света в атмосфере, свободной от облаков и тумана, и ослабление света в тумане.

Первый вид ослабления складывается из рассеяния света на молекулах газа и водяного пара и селективного поглощения. Мощность, которую несут свето-

вые и инфракрасные волны, прошедшие в атмосфере некоторое расстояние r , вычисляется аналогично мощности радиоволны:

$$P = P_0 e^{-\Gamma r}, \quad (4.41)$$

где Γ – суммарный коэффициент поглощения:

$$\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_n + \Gamma_{\text{сел}} + \Gamma_t. \quad (4.42)$$

Здесь Γ_r и Γ_n – коэффициенты ослабления за счет рассеяния на молекулах газа и пара; $\Gamma_{\text{сел}}$ – коэффициент селективного поглощения; Γ_t – коэффициент затухания в тумане.

Молекулы газов и водяных паров обладают электронной, колебательной и вращательной энергиями. При излучении или поглощении кванта электромагнитных колебаний определенной частоты скачком изменяются уровни этих энергий. Поглощение такого рода, наблюдаемое в узкой полосе частот, называется селективным поглощением. Полосу частот, в которой происходит поглощение, называют линией поглощения.

Селективное поглощение особенно характерно для ИК диапазона. На рисунке 4.21 показано распределение поглощения энергии нормального солнечного спектра атмосферными газами, измеренное для диапазона волн $0,1 \dots 100$ мкм у поверхности Земли (1) и на высоте 11 км (2) над Землей. На рисунке указаны газы, обуславливающие поглощение на отдельных участках спектра.

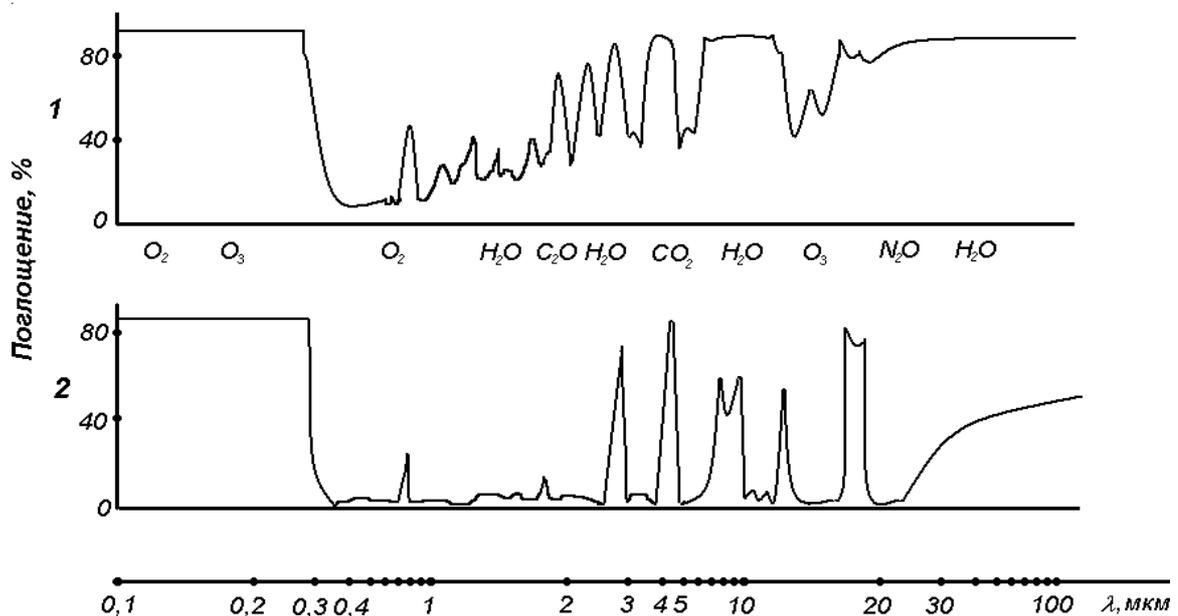


Рисунок 4.21 – Распределение поглощения энергии нормального солнечного спектра атмосферными газами: 1 – поглощение солнечного излучения, достигающего поверхности Земли; 2 – поглощение солнечного излучения, достигающего высоты 11 км

В видимой части спектра на волнах 0,4...0,76 мкм поглощение незначительное. Световые и ИК волны, падая на молекулы и атомы газа, приводят их в колебательное и вращательное движение. Поскольку размеры молекул малы по сравнению с длиной волны, они переизлучают энергию как элементарные излучатели, Благодаря тепловому движению молекул нет фазовой зависимости между вторичным излучением отдельных молекул. Поэтому, хотя расстояние между молекулами вблизи поверхности Земли мало по сравнению с длиной волны, молекулы можно рассматривать как независимые излучатели и считать, что излучение от всех молекул пропорционально числу рассеивающих частиц. Явление рассеяния приводит к ослаблению мощности, передаваемой в заданном направлении. Коэффициент ослабления за счет рассеяния волн определяется следующим выражением:

$$\Gamma_r = \frac{8\pi}{3N_m \lambda^4} (n^2 - 1)^2, \quad (4.43)$$

где N_m – число молекул в единице объема воздуха; n – коэффициент преломления воздуха.

Коэффициент ослабления обратно пропорционален λ^4 , следовательно, этот вид ослабления значительно меньше проявляется в инфракрасном диапазоне, чем в световом. Энергия рассеянного света распределяется в пространстве неравномерно: наибольшая часть энергии рассеивается в прямом и обратном направлениях.

Имеются таблицы величин Γ_r для различных высот и направлений распространения в атмосфере.

В свободной от облаков и туманов атмосфере содержатся частицы примесей – капель воды и пыли, называемых дымкой.

При конденсации пара возникают очень мелкие капельки, радиус которых имеет порядок 1 мкм. Пыль представляет собой земляную пыль, индустриальную копоть и пыль космического происхождения.

На частицах пара и пыли также происходит рассеяние оптических и ИК волн. Имеются расчетные и экспериментальные данные, представленные в виде таблиц и графиков, по которым можно определить коэффициент ослабления оптических и ИК волн в дымке.

Потери этого вида имеют наибольшую величину в горах, на ИК волнах они меньше, чем на волнах оптического диапазона.

В каплях тумана происходят тепловые потери и рассеяние, как это имеет место в диапазоне миллиметровых и сантиметровых радиоволн.

Наиболее крупные капли тумана имеют размер 5-50 мкм, т.е. диаметр их нельзя считать малым для волн оптического и ближнего инфракрасного диапазонов. Расстояние между каплями велико по сравнению с их размером.

В таблице 3 приведены некоторые характеристики дождя и тумана, необходимые для расчета поглощения волн.

Таблица 3 – Характеристики для расчета поглощения в гидрометеорах

Тип осадков	Осадок, мм/ч	Размер капель, мкм	Число капель в 1м ³ объема	Расстояние между каплями, см	Содержание воды, г/м ³
Туман	Следы	5	$1,14 \cdot 10^7$	0,445	$6 \cdot 10^{-3}$
Плотный сырой туман	0,05	50	-	-	$55,5 \cdot 10^{-3}$
Изморось	0,25	100	-	-	$92,6 \cdot 10^{-3}$
Слабый дождь	1,00	225	-	-	0,139
Средний дождь	4,00	500	530	12,3	0,279
Сильный дождь	15,00	750	-	-	0,833
Очень сильный дождь	40,00	1050	-	-	1,852
Ливень	100,00	2000	380	13,8	5,401

2. Оптические квантовые генераторы (ОКГ) создают остронаправленное когерентное излучение высокой монохроматичности, что вызывает специфические особенности распространения этих излучений в атмосфере.

Ширина линий излучения ОКГ значительно меньше ширины линий в спектрах поглощения атмосферных газов. Для количественной оценки поглощения излучения ОКГ необходимо с большой степенью точности знать положения, интенсивности и форму отдельных спектральных линий атмосферных газов. На рисунке 4.22 представлена запись на участке излучения первой гармоники газового ОКГ ($\lambda = 0,69 \mu\text{м}$). Запись сделана с высоким, но конечным разрешением, которое сглаживает истинную картину.

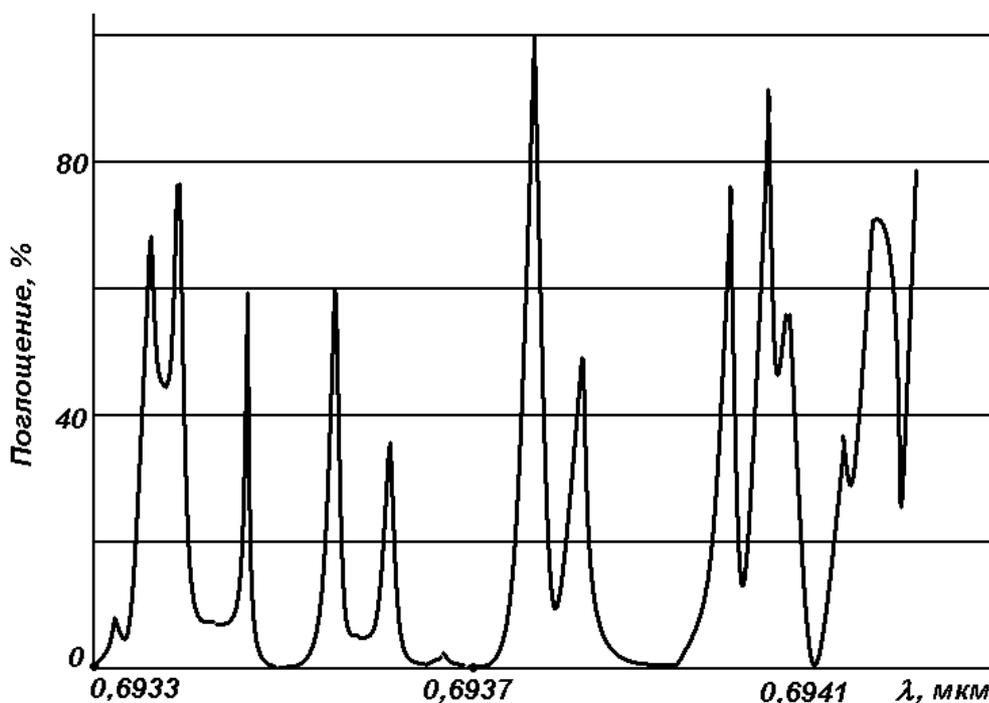


Рисунок 4.22 – Запись тонкой структуры спектра поглощения земной атмосферы ($\lambda = 0,69 \mu\text{м}$)

Очевидно, если длина волны ОКГ изменится, то значительно изменится поглощение этого излучения. В поглощении излучений ОКГ существенную роль могут играть весьма слабые линии, когда их центры совпадают с центрами излучения. Поэтому при количественной оценке поглощения излучения ОКГ нельзя пренебрегать малыми примесями газов, такими, как метан, окись азота, окись углерода.

Наиболее надежно характеристики поглощения излучения ОКГ определяются экспериментально. Установлено, что при распространении излучения ОКГ в рассеивающей среде (дымке, тумане) коэффициент ослабления приблизительно равен коэффициенту ослабления некогерентного излучения на тех же волнах.

Благодаря присутствию в атмосфере неоднородностей коэффициента преломления и флуктуаций этих неоднородностей происходит чрезвычайно быстрая флуктуация амплитуд и фаз оптических и ИК волн. Анализ экспериментальных данных показывает, что среднеквадратическое отклонение уровня сигнала увеличивается с ростом протяженности трассы и слабо зависит от длины волны излучения. Турбулентные движения в атмосфере вызывают дополнительное расширение диаметра пучка по сравнению с диаметром пучка в вакууме при прочих равных условиях. Это ограничивает возможность получения в атмосфере пучков малого сечения. Флуктуация неоднородностей атмосферы вызывает флуктуации углов прихода излучения, что приводит к смещению и размытию изображения. Кроме того, искажение фазового фронта волны и перераспределение интенсивности в сечении пучка приводит к ухудшению пространственной и временной когерентности излучения ОКГ. Все эти явления находят в стадии изучения.

3. Рефракция оптических и инфракрасных волн. Различают астрономическую рефракцию – преломление лучей, идущих от небесного светила или другого источника, находящегося на большой высоте, к наблюдателю, и земную рефракцию – преломление лучей, идущих от земных объектов.

Необходимо отметить, что оптические и ближние ИК волны рефрагируют меньше, чем радиоволны. Это вызвано тем, что в рассматриваемых диапазонах влиянием водяного пара, содержащегося в воздухе, можно пренебречь, поскольку ориентация молекул воды не успевает меняться с высокой частотой поля. Выражение для определения диэлектрической проницаемости тропосферы упрощается по сравнению с общей формулой:

$$\varepsilon = 1 - \frac{157 \cdot P_r}{T} \cdot 10^{-8}, \quad (4.44)$$

где P_r – парциальное давление сухого воздуха, МПа.

При астрономической рефракции, когда луч проходит всю толщу атмосферы, коэффициент преломления которой возрастает с приближением к поверхности Земли, траектория волны всегда обращена выпуклостью к зениту (поло-

жительная рефракция). Как и в случае радиоволн явление рефракции приводит к ошибке в определении угла места.

Среднюю рефракционную ошибку $\delta\Theta$ при давлении $p_0 = 1$ МПа и температуре $t = 10^\circ\text{C}$ вблизи поверхности Земли для зенитных углов $\Theta_{\text{п}} < 70^\circ$ можно вычислить по приближенной формуле

$$\delta\Theta \approx 58'' \text{ctg } \Theta_{\text{п}}. \quad (4.45)$$

Для точного определения рефракционной ошибки в оптическом и ИК диапазонах служат Пулковские таблицы астрономической рефракции.

Рефракция увеличивает продолжительность дня на 8...20 мин. в средних широтах.

Благодаря перемещению воздуха наблюдается изменение угла рефракции и происходит мерцание звезд. Рефракция препятствует точному определению координат светил в астрономии.

Земная рефракция может быть как положительной, так и отрицательной. В условиях нормальной рефракции расстояние прямой видимости в оптическом и ИК диапазонах оказывается несколько меньше, чем в радиодиапазоне

$$r_0 = 3,83(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), [\text{км}]. \quad (4.46)$$

Радиус кривизны траектории оптической волны составляет примерно 50000 км. В оптическом и ИК диапазонах явление сверхрефракции наблюдается реже, чем в радиодиапазоне. Со сверхрефракцией связано явление миража.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Общие свойства метрических радиоволн.
2. Понятие ионосферного волновода.
3. Каким образом происходит отражение от ионосферы на частотах СВД диапазона?
4. Какими волнами распространяются метрические волны?
5. Каким образом происходит интерференция пространственной и поверхностной волн?
6. Общие свойства километровых радиоволн.
7. По какой формуле (методике) производится расчет напряженности поля для километровых радиоволн в точке приема на расстояниях до 500-600 км?
8. По какой формуле (методике) производится расчет напряженности поля для километровых радиоволн в точке приема на больших расстояниях?
9. Помехи в диапазоне метрических и километровых радиоволн.
10. Формула Остина.
11. Особенности распространения метрических и километровых волн.
12. Общие свойства гектометровых радиоволн.
13. Как определяют напряженность электрического поля гектометровых радиоволн (земных волн) для малых расстояний?
14. Как определяют напряженность электрического поля гектометровых радиоволн (земных волн) для больших расстояний?

15. Распространение гектометровых волн в ночное время.
16. Замирания гектометровых радиоволн.
17. Общие свойства декаметровых радиоволн.
18. Расчет напряженности электрического поля декаметровых радиоволн для поверхностной волны.
19. На какие расстояния могут распространяться ионосферной волной короткие волны?
20. Максимальная применимая частота (МПЧ) и наименьшая применимая частота (НПЧ).
21. Схема распространения коротких волн на большие расстояния.
22. Как меняется электронная плотность ионосферы в течение суток и в течение года?
23. Замирания декаметровых радиоволн.

Приложение А

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Напомним математические методы описания полей и применяемую терминологию. Предполагается, что обучаемые с этими методами ознакомились, изучая некоторый анализ. Поэтому ограничимся лишь обзором, не стремясь к доказательной строгости, а делая упор на наглядность.

Терминология теории поля заимствована из теории движения (течения) сжимаемой жидкости (гидродинамики). Физическим объектом, реализующим такую «сплошную» среду, является движущийся газ, поскольку реальные жидкости сжимаются лишь в ничтожной степени. Тем не менее, как это общепринято, будем говорить именно о жидкости.

Регулярное течение жидкости (оно понимается как противоположность турбулентному, беспорядочному) характеризуется двумя величинами - *плотностью* в точке $\rho(M,t)$ и *скоростью* в этой же точке $V(M,t)$, которые образуют два поля - скалярное и векторное. *Вектор плотности тока*

$$\bar{J} = \rho \bar{V} \quad (\text{A.1})$$

образует третье поле, объединяющее в себе первые два.

Скалярное поле ρ задается скалярной функцией точки и графически может быть изображено системой поверхностей $\rho=\rho_1$, $\rho=\rho_2$ (рисунок А.1), некоторые называются *поверхностями уровня* (т.е. уровня значений ρ). На рисунках поверхности уровня принято проводить так, чтобы при переходе с одной поверхности на соседнюю скаляр менялся на одну и ту же ступень для всего чертежа (сравните уровни высот на географических картах), т.е. $\rho_{n+1} - \rho_n = \Delta\rho - \text{const}$. Тогда места, где поверхности уровня сближаются, указывают области быстрого изменения скаляра в пространстве.

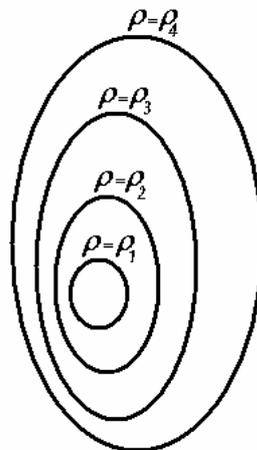


Рисунок А.1 – Поверхности уровня

Векторное поле. Векторное поле, например поле \vec{V} , удобнее всего характеризовать векторными линиями, которые в каждой точке пространства характеризуют величину и направление векторного поля. Изображать векторные поля векторными (силовыми) линиями предложил Фарадей.

Градиент. Рассмотрим сначала особое векторное поле, связанное с полем скаляра. В каждой точке скалярного поля можно ввести вектор, характеризующий направление быстрого изменения скаляра. Этот вектор называется градиентом. Рассмотрим две точки M и M' , в которых скаляр имеет значения $\rho(M)$ и $\rho(M')$ (рисунок А.2). Быстрота изменения скаляра в направлении MM' характеризуется отношением

$$\frac{\rho(M') - \rho(M)}{MM'} = \frac{\Delta\rho}{\Delta l}. \quad (\text{A.2})$$

Перебирая точки $M'M''$ и т.д., мы найдем направление, где $\frac{\Delta\rho}{\Delta l}$ максимально. Это направление и принимают за направление градиента.

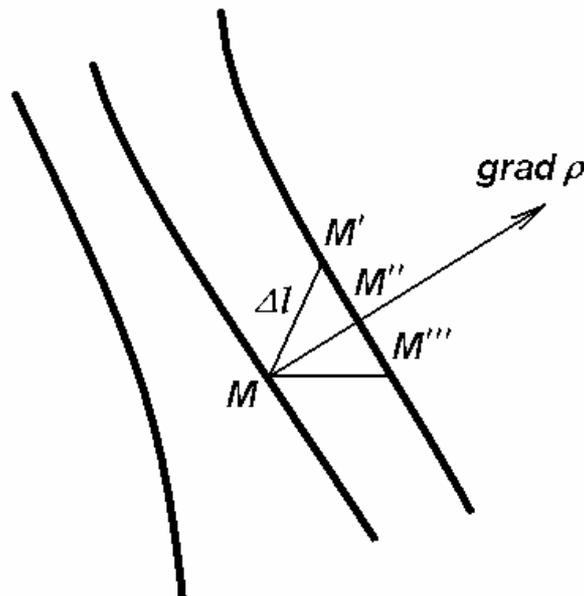


Рисунок А.2 – Градиент скалярной функции

В бесконечно малой окрестности точки M можно провести поверхности уровня, которые здесь будут параллельны. Быстрейшее изменение ρ происходит в направлении нормали \vec{n}^0 к поверхности уровня (рисунок А.3). Поэтому принимают

$$\text{grad}\rho = \vec{n}^0 \frac{\partial\rho}{\partial n}. \quad (\text{A.3})$$

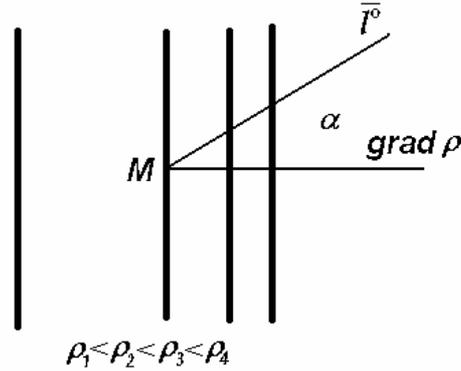


Рисунок А.3 – К определению градиента

Скорость приращения ρ вдоль другой любой линии с ортом \bar{l}^0 будет

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta l} - \frac{\Delta\rho}{\frac{\Delta n}{\cos\alpha}} = \frac{\Delta\rho}{\Delta n} \cos\alpha,$$

что в пределе дает

$$\frac{\partial\rho}{\partial l} = \frac{\partial\rho}{\partial n} \cos\alpha = (\text{grad } d\rho \bar{l}^0) = \text{grad}_1\rho. \quad (\text{A.4})$$

Используя оператор Гамильтона ∇ , можно написать выражение (А.3) в виде

$$\text{grad}\rho = \nabla\rho. \quad (\text{A.5})$$

Из сказанного следует, что векторные линии $\text{grad } \rho$ идут нормально к поверхности уровня и направлены в сторону скаляра.

Циркуляция. Вернемся к полю скоростей текущей жидкости и проведем в ней неподвижный замкнутый контур l (рисунок А.4) с указанным на нем направлением обхода. Определим циркуляцию как интеграл

$$\Gamma = \oint_l \bar{V} d\bar{l} = \oint_l V dl. \quad (\text{A.6})$$

Физический смысл циркуляции связан с понятием «работа». При небольших скоростях сила сопротивления среды пропорциональна скорости движущегося тела \bar{V} и направлена навстречу, т.е. $\bar{f}_{\text{сопр}} = -k\bar{V}$. При прохождении элемента контура с ничтожной скоростью перемещения относительно него против сил сопротивления совершается работа $dA = -\bar{f}_{\text{сопр}} \cdot d\bar{l} = k\bar{V} dl$, где V - скорость течения жидкости.

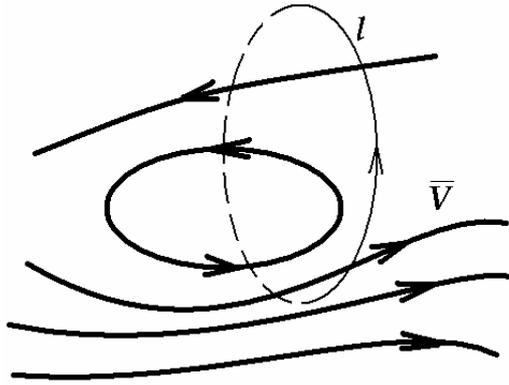


Рисунок А.4 – Циркуляция векторного поля

В самом простом и наглядном случае, когда жидкость течет по окружности (см. рисунок А.5) вокруг центра О, этот интеграл отличен от нуля и тем больше, чем быстрее движется жидкость по контуру l , так как в этом случае

$$\Gamma = \oint_l V_l dl = V_l \int_l dl = V_l l. \quad (\text{A.7})$$

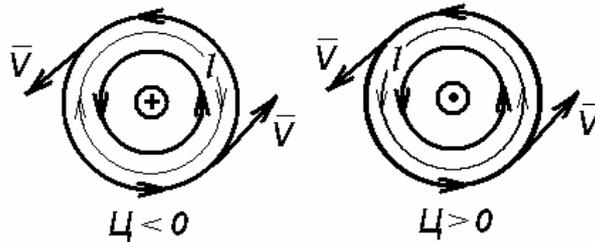


Рисунок А.5 – Определение знака циркуляции

Знак Γ положителен, если направление обхода и направление течения совпадают. Завихрения могут существовать в нескольких точках, а контур может охватывать одно или несколько из них. Если точки завихрений изолированы, то всегда можно выбрать столь малую окружность, что она охватит лишь одну точку, и циркуляция будет характеризовать завихрение в этой изолированной точке (рисунок А.6).

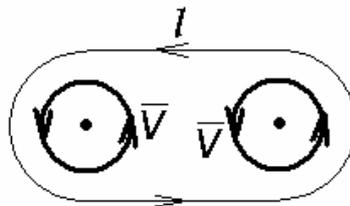


Рисунок А.6

Завихрения могут располагаться и непрерывно. Тогда циркуляция при любом размере контура даст интенсивность завихрений охваченных им. Если Γ разбить на несколько контуров (на рисунке А.7 на два), то непосредственно из рисунка видно, что

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i . \quad (\text{A.8})$$

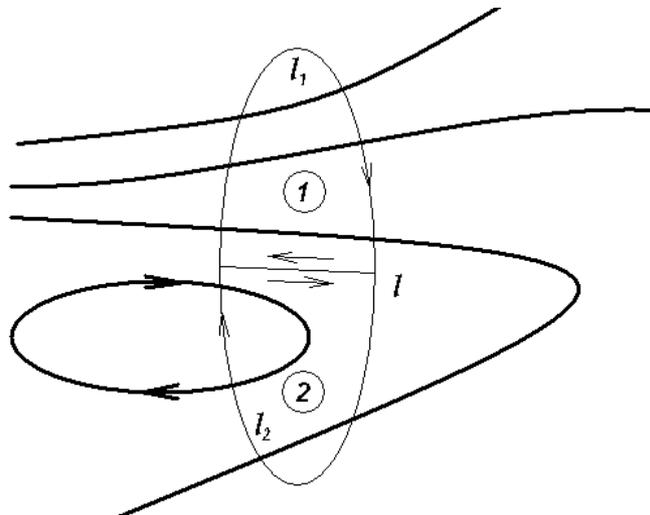


Рисунок А.7 – Суперпозиция циркуляций

Обнаружить точки завихрений можно с помощью малой турбинки, помещенной в исследуемую точку (рисунок А.8).

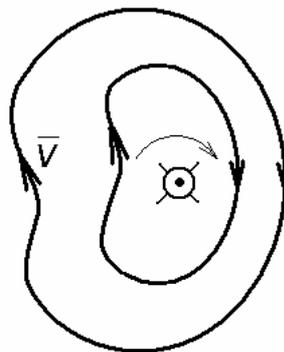


Рисунок А.8 – Обнаружение завихрений поля

Если в каком-нибудь положении оси турбинки ток жидкости будет вращать турбинку, то в данной точке есть завихрение. В одном из положений оси турбинки быстрота ее вращения будет максимальной. Ось турбинки совпадает с осью, вокруг которой вращается жидкость в данной точке.

Вихрь. Выберем теперь малый плоский контур с нормалью \bar{n}^0 связанной правилом правого винта с направлением обхода по контуру, и поместим его в жидкость так, чтобы точка М лежала в плоскости контура (рисунок А.9).

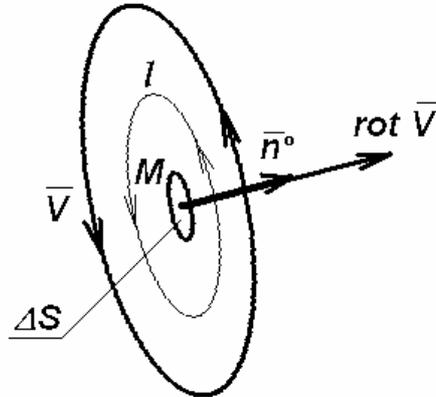


Рисунок А.9 – Ротор (вихрь) векторного поля

После этого будем поворачивать нормаль и контур во всевозможные положения. Если в М есть завихрение, то при одном из положений нормали циркуляция по контуру достигает наибольшего значения Γ_{\max} . Теперь введем вектор «вихрь», который обозначают символом $\text{rot } \bar{V}$. За направление вихря выберем направление нормали к площадке ΔS , для которой $\Gamma = \Gamma_{\max}$. Величину вихря принимают равной

$$|\text{rot } \bar{V}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{(\oint \bar{V}_l dl)_{\max}}{\Delta S}, \quad (\text{A.9})$$

т.е. длина $|\text{rot } \bar{V}|$ равна поверхностной плотности циркуляции в рассматриваемой точке жидкости (см. рисунок А.9). Циркуляция по любому контуру, нормаль которого \bar{n} отклонена от направления \bar{n}^0 , связана с вихрем соотношением

$$\text{rot}_n \bar{V} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{V}_l dl}{\Delta S}, \quad (\text{A.10})$$

С помощью оператора Гамильтона вихрь можно записать как

$$\text{rot } \bar{V} = \nabla \times \bar{V}. \quad (\text{A.11})$$

Понятия «циркуляция» и «вихрь» распространяются на любые векторные поля и являются мерой завихрений этих полей.

Если в рассматриваемой точке вихрь вектора равен нулю, то говорят, что здесь вектор потенциален. Поле потенциально в области, если во всех ее точках завихрения отсутствуют.

Поток. Понятие «поток жидкости через поверхность S » вводится для того, чтобы описать перенос массы жидкости. В этом случае рассматривается поле плотности поля жидкости $\bar{J} = \rho \bar{V}$. Понятие потока через бесконечно малую площадку dS определяется соотношением

$$d\Pi = \bar{J}d\bar{S} = JdS \cos(\bar{J}, \bar{n}^0),$$

где \bar{n}^0 - орт нормали к площадке, связанной правилом правого винта с заданным направлением обхода по контуру площадки.

Для поверхности конечных размеров поток

$$\Pi = \int_S \bar{J}d\bar{S}. \quad (\text{A.12})$$

Источники и стоки. Весьма важное значение имеет поток сквозь замкнутую поверхность. Возьмем в области, где все линии тока направлены одинаково, любую замкнутую выпуклую поверхность и разобьем ее точками линий тока на две части (рисунок А.10). Тогда через одну их часть S_1 жидкость в объем, ограниченный поверхностью, входит, а через другую часть S_2 выходит.

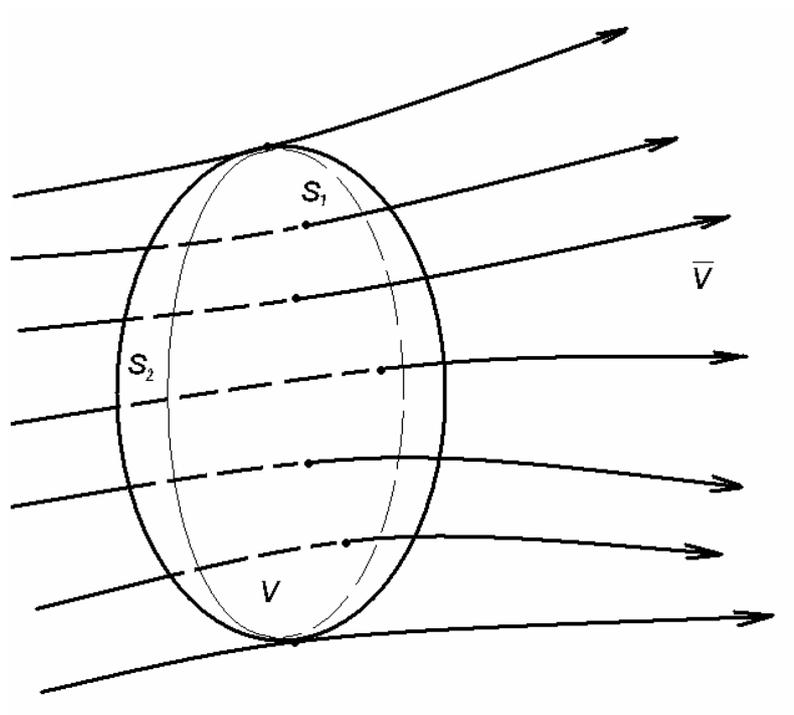


Рисунок А.10 – Поток вектора через замкнутую поверхность

Величина

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \Pi_0 \quad (\text{A.13})$$

характеризует разность между количеством жидкости, выходящей из объема и входящей в объем. Если $\Pi_0 > 0$, то говорят, что жидкость в объеме рождается и там есть источники (рисунок А.11,а). Если $\Pi_0 < 0$, то говорят, что жидкость в объеме уничтожается и там есть ее стоки (рисунок А.11,б).

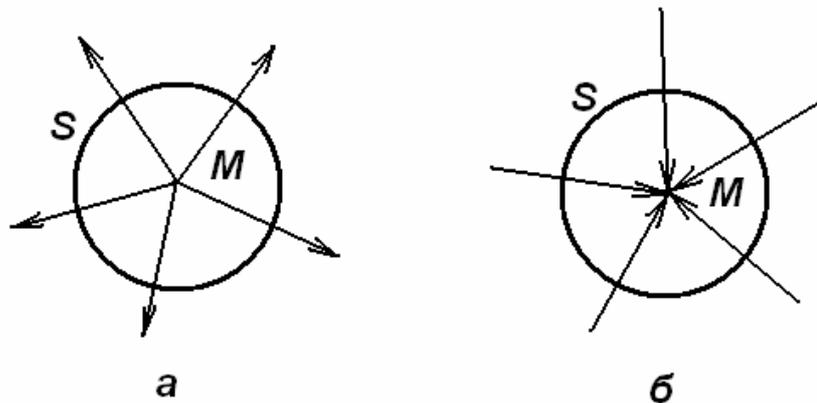


Рисунок А.11 – К определению дивергенции

Интеграл по замкнутой поверхности конечных размеров дает суммарный эффект действия всех источников и стоков в объеме V , так как их там может быть несколько и даже бесконечно много. Обнаружить наличие источника в определенной точке M можно, окружив точку бесконечно малой замкнутой поверхностью. Если при $\Delta S \rightarrow 0$ поток $\Delta \Pi_0$ остается положительным, то жидкость выходит из окрестности точки M и в M есть источник. При $\Delta \Pi_0 < 0$ в точке M имеется сток.

Дивергенция. Мерой интенсивности точечного источника является количество жидкости, рождаемое источником за единицу времени. Но источники могут быть распределенными (сравните фильтрацию жидкости через дно реки). Тогда удобной мерой интенсивности источников является отношение

$$\operatorname{div} \bar{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{V}_n dS}{\Delta V}, \quad (\text{A.14})$$

которое называют дивергенцией вектора \bar{V} . Оно характеризует относительную мощность распределенных источников.

Приложение Б

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Запись векторов в декартовых координатах:

\bar{a} и \bar{b} - векторы; $\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0$ – координатные орты;

$$\bar{a} = \bar{x}^0 a_x + \bar{y}^0 a_y + \bar{z}^0 a_z, \quad \bar{b} = \bar{x}^0 b_x + \bar{y}^0 b_y + \bar{z}^0 b_z;$$

$a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ - проекции векторов на оси координат;

$\bar{a} = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - модуль (длина) вектора.

2. Скалярное произведение двух векторов

$$\bar{a}\bar{b} = ab \cdot \cos\left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

3. Векторное произведение двух векторов

$$|\bar{a}, \bar{b}| = \bar{a} \times \bar{b} = \bar{n}^0 ab \sin\left(\overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где \bar{n}^0 - орт нормали к плоскости, в которой лежат оба вектора. Направление \bar{n}^0 определяется по правилу правого буравчика.

4. Двойное векторное произведение

$$[\bar{a}[\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

5. Поток векторного поля характеризуется вектором \bar{a} через некоторую поверхность S:

$$\Pi = \int_S \bar{a} d\bar{S}.$$

6. Циркуляция вектора \bar{a} по контуру (замкнутому пути) L

$$\Pi = \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \oint a_\ell dl,$$

где dl - элемент контура, a_ℓ - составляющая вектора \bar{a} касательная к контуру.

7. Градиент скалярной функции ϕ

$$\text{grad}\phi = \bar{n}^0 \frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi,$$

где \bar{n}^0 - орт нормали к поверхности $\phi = \text{const}$.

8. Дивергенция (расходимость) вектора \bar{a}

$$\text{div}\bar{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{a} dS}{\Delta V},$$

где S - поверхность, ограничивающая объем ΔV .

9. Ротор - это вектор, проекция которого на нормаль площадке ΔS будет

$$\text{rot}_n \bar{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\ell} \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S},$$

где ℓ - контур, ограничивающий площадку ΔS ; $\text{rot}_n \bar{a}$ - проекция вектора $\text{rot} \bar{a}$ на нормаль к площадке ΔS .

10. Векторный оператор набла (оператор Гамильтона)

$$\nabla = \bar{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}^0 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}^0 \frac{\partial}{\partial z}.$$

11. Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

12. Основные теоремы:

а) теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div} \bar{a} dV = \oint_S \bar{a} dS;$$

б) теорема Стокса

$$\int_S \text{rot} \bar{a} d\bar{S} = \oint_{\ell} \bar{a} d\bar{l},$$

где контур ℓ ограничивает площадку S ;

в) теорема Грина:

$$\int_V (\nabla\phi \nabla\phi + \phi \nabla^2\phi) dV = \oint_S \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS - \text{первое тождество Грина},$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS - \text{второе тождество Грина.}$$

Здесь φ и ϕ - скалярные функции, заданные в объеме V . Поверхность S ограничивает объем V , $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к поверхности S .

13. Производная от скалярной функции по направлению l

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \bar{l}^0 \text{grad} \varphi,$$

где \bar{l}^0 - орт в направлении l .

14. Некоторые тождества:

$$\text{grad}(\varphi \phi) = \varphi \text{grad} \phi + \phi \text{grad} \varphi;$$

$$\text{div}(\varphi \bar{a}) = \varphi \text{div} \bar{a} + \bar{a} \text{grad} \varphi;$$

$$\text{div grad} \varphi = \nabla^2 \varphi;$$

$$\text{div rot} \bar{a} = 0;$$

$$\text{div}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \text{rot} \bar{a} - \bar{a} \text{rot} \bar{b};$$

$$\text{rot}(\varphi \bar{a}) = \varphi \text{rot} \bar{a} + \text{grad} \varphi \times \bar{a};$$

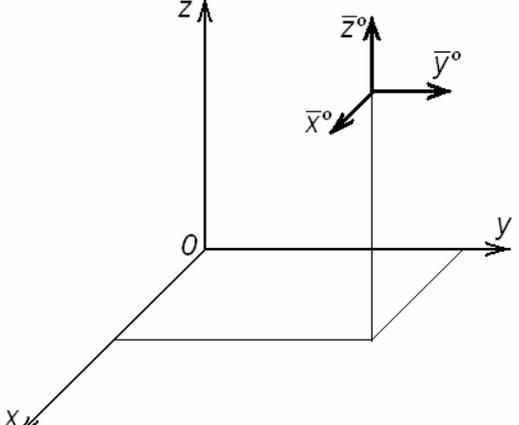
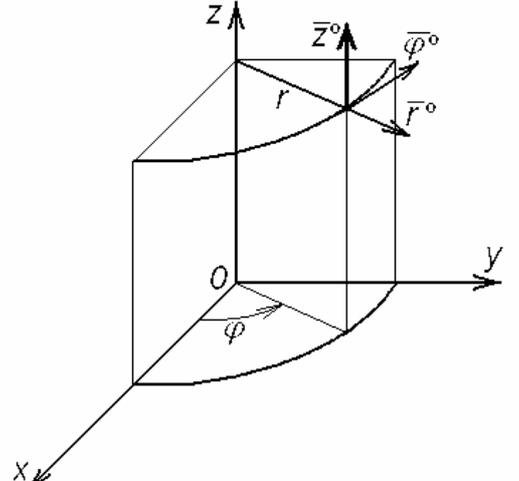
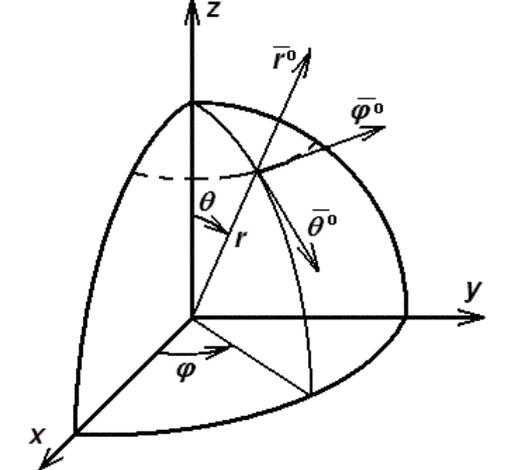
$$\text{rot grad} \varphi = 0;$$

$$\text{rot rot} \bar{a} = \text{grad div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a};$$

$$\text{rot}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \text{div} \bar{b} - \bar{b} \text{div} \bar{a} + (\bar{b} \nabla) \bar{a} - (\bar{a} \nabla) \bar{b}.$$

Приложение В

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Наименование системы координат. Обозначение координат и ортов	Рисунок системы координат	Определение координатных поверхностей
<p>Декартова (прямоугольная)</p> <p>x, y, z</p> <p>$\bar{x}^o, \bar{y}^o, \bar{z}^o$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Плоскость $x = \text{const.}$ 2. Плоскость $y = \text{const.}$ 3. Плоскость $z = \text{const.}$
<p>Цилиндрическая</p> <p>r, φ, z</p> <p>$\bar{r}^o, \bar{\varphi}^o, \bar{z}^o$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Круговой цилиндр $r = \text{const.}$ 2. Плоскость $\varphi = \text{const.}$ 3. Плоскость $z = \text{const.}$
<p>Сферическая</p> <p>r, θ, φ</p> <p>$\bar{r}^o, \bar{\theta}^o, \bar{\varphi}^o$</p>		<ol style="list-style-type: none"> 1. Сфера $r = \text{const.}$ 2. Коническая поверхность $\theta = \text{const}$ с вершиной в начале координат. 3. Плоскость $\varphi = \text{const.}$

Библиографический список

- 1 Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. – М.: Гардарики, 2003. – 317с.
- 2 Алексеев, М.А. Теория электромагнитного поля и техника сверхвысоких частот/ Учебник/ М.А.Алексеев, Г.С.Богословский, Л.К.Черняев, Б.И.Штительман; Под ред. Б.И.Штительмана. – Харьков: ВИРГА, 1974. – 494 с.
- 3 Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1966. – 772 с.
- 4 Петушинский, Б.Б. Электродинамика и распространение радиоволн. Ч.1. Теория электромагнитного поля/ Б.Б.Петушинский. Конспект лекций. – Даугавпилс: ДВВАИУ, 1984. – 170 с.
- 5 Шевченко, В.Д. Электродинамика и распространение радиоволн. Ч.2. Теория электромагнитного поля/ В.Д.Шевченко. Конспект лекций. – Даугавпилс: ДВВАИУ, 1987. – 140 с.
- 6 Новокшанов, М.Н. Электродинамика и распространение радиоволн/ Учебник. – Рига: РВВАИУ, 1981. – 564 с.
- 7 Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие/ В.В.Никольский. – М.: Наука, 1978. – 544 с.
- 8 Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие для вузов/ В.В.Никольский, Т.И.Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
- 9 Грудинская, Г.П. Распространение радиоволн: Учебное пособие/ Г.П.Грудинская. – М.: Высш. школа, 1975. – 280 с.
- 10 Федоров, Н.Н. Основы электродинамики: Учебное пособие для вузов/ Н.Н.Федоров. – М.: Высш. школа, 1980. – 399 с.
- 11 Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике/ Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1976. – 348 с.
- 12 Несис, Е.И. Методы математической физики/ Учебное пособие/ Е.И.Несис. – М.:1977. – 199 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1 ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	3
1.2 Основные понятия и законы электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей.....	3
1.2.1 Задачи, содержание дисциплины и ее связь с другими областями радиотехники.....	3
1.2.2 Краткий исторический обзор развития представлений об электромагнитном поле, как одной из форм существования материи.....	4
1.2.3 Основные физические величины, характеризующие ЭМП и его источники.....	6
1.3 Основные законы электродинамики.....	10
1.3.1 Уравнения Максвелла и их физический смысл.....	10
1.3.1.1 Закон сохранения зарядов (уравнение непрерывности).....	14
1.3.1.2 Закон непрерывности линий полного тока.....	15
1.3.2 Комплексный гармонический вектор. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд.....	15
1.3.2.1 Комплексный гармонический вектор (скаляр).....	15
1.3.2.2 Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд.....	16
1.3.3 Комплексная диэлектрическая проницаемость. Токи смещения в гармонических полях.....	18
1.3.3.1 Комплексная диэлектрическая проницаемость.....	18
1.3.3.2 Токи смещения в гармонических полях.....	19
1.4 Граничные условия для векторов электромагнитного поля.....	21
1.4.1 Граничные условия для касательных (тангенциальных) составляющих векторов E и H	21
1.3.3 Граничные условия для нормальных составляющих векторов E и H	26

1.3.4	Граничные условия для векторов поля на границе раздела с идеальным проводником.....	30
1.4	Энергетические соотношения в электромагнитном поле.....	33
1.4.1	Теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной и интегральной форме. Физический смысл слагаемых.....	33
1.4.2	Комплексный вектор Пойнтинга.....	36
1.5	Основные законы электростатики, стационарного электрического поля и магнитного поля постоянного тока.....	39
1.5.1	Основные свойства электростатического поля.....	39
1.5.2	Стационарное электрическое поле.....	45
1.5.2.1	Сравнение стационарного электрического поля с электростатическим.....	46
1.5.2.2	Квазистационарное поле.....	47
1.5.3	Магнитное поле постоянного тока (стационарное магнитное поле).....	50
ГЛАВА 2 ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....		53
2.1	Методы решения уравнений Максвелла.....	53
2.2.1	Волновые уравнения для векторов поля.....	53
2.2.2	Метод скалярного и векторного потенциалов.....	55
2.2.3	Метод векторов Герца.....	56
2.2.4	Теорема единственности решений уравнений Максвелла.....	57
2.3	Плоские ЭМВ в идеальном диэлектрике.....	61
2.2.1	Электромагнитные волны в свободном пространстве.....	61
2.2.2	Плоские гармонические волны в изотропном идеальном диэлектрике.....	62

2.2.2.1	Фазовая скорость.....	64
2.2.2.2	Длина волны.....	64
2.2.2.3	Направление векторов поля.....	65
2.2.2.4	Фазовые соотношения между векторами поля. Характеристическое сопротивление среды.....	66
2.3	Плоские ЭМВ в однородной изотропной проводящей среде.....	69
2.3.1	Плоские гармонические волны в однородной проводящей среде....	69
2.3.1.1	Дисперсия электромагнитных волн.....	70
2.3.1.2	Групповая скорость.....	71
2.3.1.3	Характеристическое сопротивление. Вектор Пойнтинга.....	73
2.3.2	Классификация сред по проводимости.....	75
2.4	Поляризация электромагнитного поля.....	78
2.4.1	Основные определения. Вывод уравнения поляризационного эллипса.....	78
2.4.2	Параметры поляризационного эллипса. Виды поляризационного эллипса.....	80
2.4.3	Выражения для комплексного вектора напряженности поляризованного ЭМП.....	84
2.4.4	Вектор Пойнтинга эллиптически поляризованной волны.....	85
2.5	Преломление и отражение плоских волн на плоской границе раздела двух сред.....	87
2.5.1	Основные определения.....	87
2.5.2	Законы преломления и отражения.....	88
2.5.3	Коэффициенты отражения и преломления для волн касательной поляризации.....	91
2.5.4	Коэффициенты отражения и преломления для волн нормальной поляризации.....	93
2.5.5	Анализ коэффициентов Френеля. Угол Брюстера. Критический угол.....	94

2.5.6	Структуры полей в граничащих средах.....	97
2.5.7	Прохождение волны в оптически более плотную среду. Поверхностный эффект.....	102
2.6	Электромагнитное поле элементарных источников.....	105
2.6.1	Поле излучения элементарного электрического вибратора (диполя Герца).....	105
2.6.2	Анализ поля элементарного электрического вибратора.....	108
2.6.3	Мощность и сопротивление излучения элементарного вибратора.....	112
2.7	Поле излучения элементарного магнитного вибратора и источника Гюйгенса.....	114
2.7.1	Поле излучения элементарного магнитного вибратора (магнитной рамки).....	114
2.7.2	Анализ поля магнитной рамки в дальней зоне.....	115
2.8	Поле источника Гюйгенса.....	117

ГЛАВА 3 СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....122

3.1	Понятие о вычислительных методах современной электродинамики.....	122
3.1.1	Проекционные методы.....	122
3.1.2	Дискретизационные методы.....	125
3.1.2.1	Коллокации.....	125
3.1.2.2	Разностные схемы.....	126
3.1.2.3	Конечные элементы.....	127
3.1.3	Декомпозиционный принцип. Математическое моделирование сложных структур.....	128
3.2	Основная задача теории регулярных линий передачи и ее решение.....	132
3.2.1	Классификация линий передачи. Типы линий передачи.....	132

3.2.2	Решение мембранного и телеграфного уравнений. Типы полей (волн). Распространяющиеся и нераспространяющиеся поля.....	133
3.2.3	Основная волна в прямоугольном волноводе и ее характеристики.....	140
3.2.4	Волны высших типов в прямоугольных волноводах.....	149
3.2.5	Круглый волновод. Основная волна в КВ и ее характеристики.....	153
3.2.6	Волны высших типов в круглом волноводе.....	158
3.2.7	Резонаторы волноводной формы.....	162
3.2.8	Типы полей в резонаторах.....	162
3.2.9	Собственная длина волны резонатора.....	166
3.2.10	Добротность реальных объемных резонаторов.....	167
3.2.11	Объемные резонаторы сложной формы.....	169
3.3	Замедляющие системы СВЧ.....	171
3.3.1	Способы замедления электромагнитных волн.....	171
3.3.2	Однородные замедляющие системы. Свойства замедленных ЭМВ.....	172
3.3.3	ЗС типа «гребенка». Пространственные гармоники.....	174
3.3.4	Замедляющая система типа «спираль».....	177
3.4	Электромагнитные волны в гиротропных средах.....	179
3.4.1	Намагниченная плазма.....	179
3.4.2	Основные свойства ферритов.....	182
3.4.3	Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита.....	183
3.4.4	Распространение плоской ЭМВ в продольно намагниченном феррите.....	186
3.4.5	Явления и эффекты в продольно намагниченном феррите.....	189
3.4.6	Распространение плоской ЭМВ в поперечно намагниченном феррите.....	190
3.4.7	Явления и эффекты в поперечно намагниченном феррите.....	193

ГЛАВА 4 ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ.....	196
4.1 Влияние земной поверхности на распространение радиоволн.....	196
4.1.1 Классификация радиоволн по частотному диапазону.....	196
4.1.2 Распространение радиоволн в свободном пространстве и отраже- ние от земной поверхности.....	197
4.1.2.1 Распространение радиоволн в свободном пространстве...197	
4.1.2.2 Отражение от ровной земной поверхности.....	197
4.1.2.3 Отражение от неровной земной поверхности. Критерий Ре- лея.....	197
4.1.2.4 Область, существенная при распространении радиоволн.....	198
4.1.3 Формула Б.А.Введенского.....	198
4.1.4 Формула М.В.Шулейкина.....	199
4.1.5 Учет кривизны земной поверхности при распространении радио- волн.....	201
4.2 Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн.....	205
4.2.1 Состав и строение атмосферы. Тропосфера и ионосфера.....	205
4.2.2 Распространение радиоволн в тропосфере.....	206
4.2.2.1 Состав и строение тропосферы.....	206
4.2.2.2 Распространение волн в тропосфере. Тропосферная рефрак- ция.....	208
4.2.3 Распространение радиоволн в ионосфере.....	212
4.2.3.1 Строение ионосферы.....	212
4.2.3.2 Влияние ионосферы на распространение радиоволн.....	213
4.2.3.3 Отражение радиоволн от ионосферы.....	214
4.3 Распространение радиоволн различных частотных диапазонов.....	218

4.3.1	Распространение мириаметровых (сверхдлинных) и километро- вых (длинных) радиоволн.....	218
4.3.1.1	Распространение мириаметровых радиоволн.....	218
4.3.1.2	Распространение километровых радиоволн.....	221
4.3.2	Распространение гектометровых (средних), декаметровых (ко- ротких) и ультракоротких волн.....	222
4.3.2.1	Распространение гектометровых радиоволн.....	222
4.3.2.2	Распространение декаметровых радиоволн.....	224
4.3.2.3	Распространение ультракоротких радиоволн.....	228
4.3.2.4	Распространение радиоволн оптического диапазона.....	230
	Приложение А. Основные понятия математической теории поля.....	238
	Приложение Б. Основные формулы векторного анализа.....	246
	Приложение В. Ортогональные координаты.....	249
	Библиографический список.....	250