

В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова

РАДИОФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Учебное пособие

Москва – Ижевск
Институт компьютерных исследований
2017

Анищенко В.С., Стрелкова Г.И.

Радиофизика и нелинейная динамика. Учебное пособие. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 167 с.

В учебном пособии изложены основные вопросы и проблемы, которые изучаются студентами физических факультетов в рамках направления подготовки по специальности “Радиофизика”. Пособие включает две части: радиофизика и нелинейная динамика. Материал пособия излагается по возможности наиболее просто и понятно и не требует знаний физики и математики, выходящих за рамки программ средней школы.

Пособие ориентировано на выпускников средних школ и студентов первого курса физических факультетов и преследует цель в доступной форме ознакомить их с содержанием радиофизики.

Р е ц е н з е н т:

доктор физико-математических наук, профессор *Т.Е. Вадивасова*
(Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского)

Р е к о м е н д у е т к п е ч а т и

кафедра радиофизики и нелинейной динамики физического факультета
Саратовского национального исследовательского государственного
университета имени Н.Г. Чернышевского

Оглавление

Предисловие	5
Часть 1. Радиофизика	9
1.1 Введение	9
1.2 Классические научные проблемы радиофизики	15
1.3 Нелинейность	24
1.4 Спектральное представление колебательных процессов	30
1.5 Генерация колебаний	35
1.6 Модуляция высокочастотных колебаний	43
1.7 Детектирование модулированных колебаний	49
1.8 Резонанс в линейном контуре	52
1.9 Резонанс в нелинейном контуре	55
1.10 Параметрический резонанс	58
1.11 Радиофизика в нашей жизни	65
Часть 2. Нелинейная динамика	71
2.1 Динамические системы	74
2.2 Устойчивость, бифуркации и катастрофы	94
2.3 Динамический хаос	110
2.4 Фракталы	130
2.4.1 Понятие фрактала	130
2.4.2 Примеры фрактальных множеств	134
2.5 Синхронизация периодических автоколебаний	153
Заключение	167

Предисловие

Настоящее учебное пособие имеет целью знакомство с основными понятиями и проблемами, составляющими предмет изучения по направлению “Радиофизика” при подготовке бакалавров на физических факультетах университетов. Книга ориентирована на выпускников средних школ, перед которыми стоит задача выбора специальности при поступлении в высшее учебное заведение. Авторы выражают надежду, что настоящая книга поможет абитуриентам более осознанно остановить свой выбор на направлении “Радиофизика” и более конкретно подойти к выбору соответствующего профиля подготовки в рамках этого направления. Если раньше, до введения в вузах страны бакалавриата, у студентов специальности “Радиофизика” после 2-го курса имелась возможность выбора специализации подготовки, то у бакалавров такой возможности нет. При поступлении абитуриент должен выбрать конкретный профиль подготовки по направлению “Радиофизика” и обучаться по учебному плану этого профиля. В связи с этим выбор направления и профиля подготовки является чрезвычайно важным и ответственным решением, которое должен принять абитуриент.

Вашему вниманию предлагается учебное пособие “Радиофизика и нелинейная динамика”, в котором в наиболее доступной форме излагаются основные вопросы и проблемы,

изучаемые студентами университетов в рамках подготовки бакалавров по направлению “Радиофизика”. Излагаются ключевые проблемы радиофизики, которые являются общими для ряда профилей подготовки по направлению “Радиофизика”.

Книга включает две части: радиофизика и нелинейная динамика. В первой части на примере классической системы радиосвязи иллюстрируются практически все фундаментально-научные и технические аспекты радиофизической науки. Рассматриваются проблемы генерации и модуляции электромагнитных колебаний, усиления, излучения радиосигналов и их детектирования с целью выделения сигналов, несущих информацию. Описываются примеры практического использования радиофизики в науке и технике. При изложении материала авторы не используют знаний физики и математики, выходящих за рамки школьной программы.

Вторая часть пособия посвящена описанию задач и методов, которые относятся к достаточно новому научному направлению – нелинейной динамике. Современная наука имеет дело в основном с анализом нелинейных процессов и систем. Исследования нелинейных явлений требуют широкого спектра знаний, которые позволяют решать и анализировать нелинейные задачи. Классические методы нелинейной динамики традиционно входили в круг проблем радиофизики и изучались в рамках теории нелинейных колебаний. Однако в связи с внедрением современной вычислительной техники и разработкой новых алгоритмов и программ нелинейная динамика в настоящее время сформировалась как самостоятельное научное направление. В этой части пособия даются

понятие и определение динамической системы, описывается и иллюстрируется фундаментальное свойство нелинейности, дается представление об устойчивости колебательных и стационарных режимов и их бифуркаций. Описывается явление детерминированного хаоса и приводятся сведения из теории фракталов. В заключении второй части обсуждается одна из классических задач нелинейной динамики – задача о внешней синхронизации автоколебаний в генераторе ван дер Поля. Несмотря на усилия авторов изложить материал второй части пособия наиболее просто и понятно, чтение ряда ее разделов потребует более углубленных знаний по математике, которые излагаются в школах с физико-математической направленностью.

Несколько слов о создании этой книги. Пособие написано на основе курса лекций по введению в специальность “Радиофизика”, который на протяжении трех десятков лет читается на кафедре радиофизики и нелинейной динамики в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского. Отметим, что несмотря на то, что подготовка студентов по радиофизике в нашей стране успешно ведется уже более шестидесяти лет, учебной литературы подобного типа практически нет. Есть огромное количество научных статей, научных монографий и диссертаций. Но научно-популярного изложения основ содержания радиофизической науки практически не проводилось. Этот пробел отчасти восполнялся трудами сотрудников кафедры радиофизики и нелинейной динамики Саратовского университета. Отметим учебное пособие Г.И. Герштейна “Введение в специальность. Радиофизика” (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та,

1983), а также книгу В.С. Анищенко “Знакомство с нелинейной динамикой” (Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002). К сожалению, указанные книги являются практически недоступными, так как представляют собой библиографическую редкость. При подготовке настоящей книги были использованы как вышеуказанные издания, так и учебное пособие доцента кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ Г.И. Стрелковой “Практикум по динамике дискретных систем” (Саратов: ООО Изд. центр “Наука”, 2012).

В заключение авторы хотели бы выразить глубокую благодарность коллективу кафедры за обсуждение и замечания. Мы благодарны также аспиранту кафедры А.В. Буху за помощь при подготовке иллюстраций к книге.

*Профессор В.С. Анищенко
Доцент Г.И. Стрелкова*

Саратов, октябрь 2017

Часть 1. Радиофизика

В первой части настоящего учебного пособия рассматриваются основные научные проблемы, с которыми приходится сталкиваться при разработке и конструировании систем радиосвязи. Безусловно, эти проблемы не могут отразить всю совокупность фундаментальных задач, которые изучаются и решаются в рамках радиофизики. И такой цели не преследовалось в настоящей работе. Нашей задачей является иллюстрация некоторых ключевых проблем, с которыми наиболее часто приходится иметь дело инженерам и исследователям при создании систем радиосвязи. Описание этих проблем позволяет на основе рассмотренных примеров охарактеризовать перечень научных дисциплин учебного плана обучения по направлению “Радиофизика”. Как нам представляется, это поможет студентам младших курсов более осознанно подходить к процессу обучения по радиофизическому направлению подготовки.

1.1 Введение

Радиофизика является одной из фундаментально важных научных дисциплин в современной физике и технике. Исторически радиофизика формировалась в процессе взаимодействия и взаимопроникновения идей и методов теории элект-

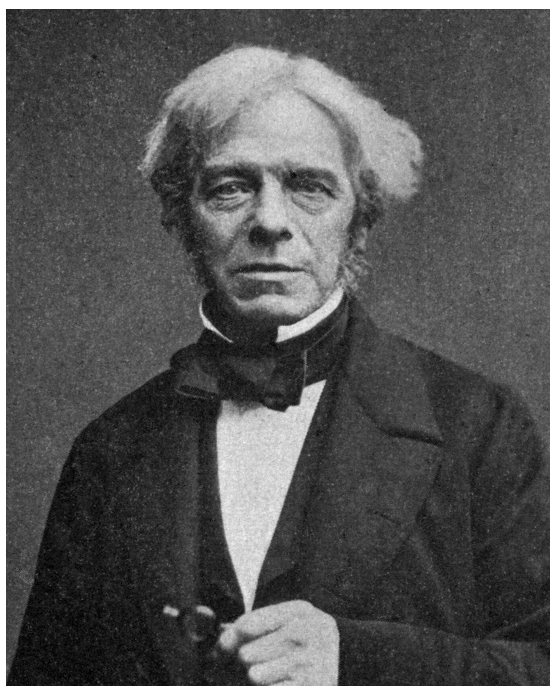
ромагнитных колебаний и волн, радиотехники, радиоэлектроники, теории передачи информации и др. Причиной такого взаимодействия послужила необходимость решения практически важной проблемы: разработки теоретических и прикладных аспектов обеспечения работы приемно-передающих систем радиосвязи в самом широком смысле. В связи с достаточно большим числом научных направлений, входящих в содержание современной радиофизики, весьма трудно дать однозначное определение этой науки. Но совершенно четко можно сформулировать два ее основных направления:

1. Теоретический анализ фундаментальных физических явлений и процессов, которые используются при создании различных систем радиосвязи. К ним относятся: теоретический анализ проблемы генерации электромагнитных колебаний в широком диапазоне частот, изучение закономерностей излучения и распространения электромагнитных волн в различных средах, проблемы модуляции электромагнитных колебаний информационными сигналами и их детектирование, проблемы усиления слабых сигналов и анализ последствий влияния шумовых возмущений. Это направление по терминологии С.М. Рытова называют “физикой для радио”, подразумевая под этим создание фундаментальной теоретической базы для практической разработки систем радиосвязи.

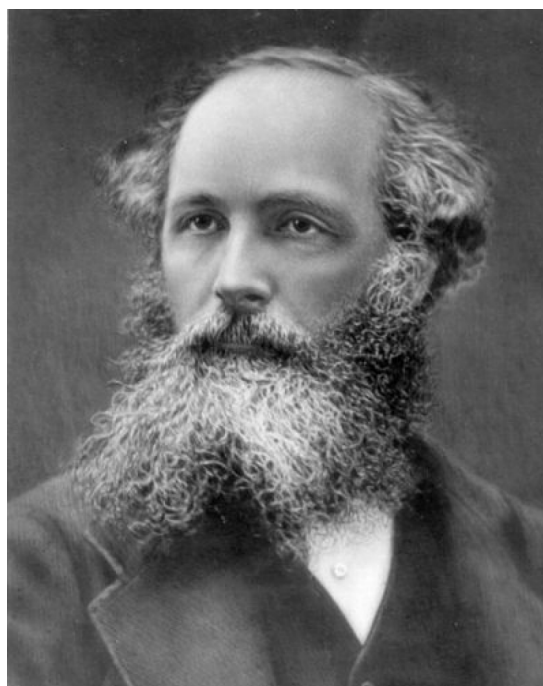
2. Применение разработанных радиофизических методов и приборов для изучения не только физических, но и многих других разнообразных объектов неживой и живой природы – атомных ядер, молекул, космических объектов, а также организмов человека и животных. Так, например, в медицине широко применяются электронные томографы, аппараты ульт-

тразвуковой диагностики, флюорография и др., которые разработаны на основе радиофизики и электроники. С.М. Рытов назвал это направление “радио для физики”.

Радиофизика возникла не на пустом месте. Ее основой явились фундаментальные открытия великих ученых – классиков, вошедших в историю мировой науки. Так в 1837–1846 гг. М. Фарадей разработал физические основы учения об электрическом и магнитном полях и высказал гипотезу об электромагнитной природе света. Великий Дж.К. Максвелл сформулировал строгие уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей (знаменитая система уравнений Максвелла). Из уравнений Максвелла следовала возможность существования электромагнитных волн, которые распространяются со скоростью света.



Майкл Фарадей, английский физик-экспериментатор (1791 – 1867)



Джеймс Клерк Максвелл, английский физик и математик (1831 – 1879)

Немецкий физик Г. Герц в 1886–1899 гг. впервые экспериментально доказал существование электромагнитных волн. Он возбуждал вибратор искровым разрядом и другой вибратор, находящийся на некотором расстоянии от первого, регистрировал принимаемый сигнал. Удивительно, но Г. Герц не придавал значения сделанному открытию. Свою задачу он видел лишь в доказательстве факта существования электромагнитных волн и не обратил внимания на то, что по сути дела им был открыт эффект беспроводной передачи сигнала с помощью электромагнитных волн! Осознание этого пришло позже. Выдающийся российский физик А.С. Попов 7 мая 1895 г. показал созданный им прибор для регистрации электромагнитных колебаний и продемонстрировал возможность его применения для беспроводной передачи сигнала. Им был создан по существу первый в мире радиоприемник.

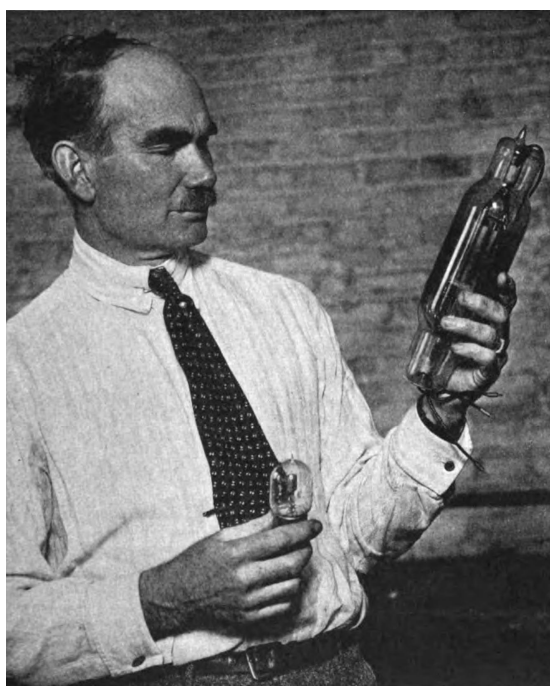


Генрих Рудольф Герц,
немецкий физик
(1857 – 1894)



Александр Степанович Попов,
российский ученый, изобретатель
радио (1859 – 1906)

Последующие годы ушли на разработку более эффективных генераторов в сравнении с простыми разрядниками. В 1907 году американский ученый Л. Форест создал электровакуумный триод, который с 1913 года стал основным элементом генераторов гармонических колебаний. Примерно с этого времени начались работы по созданию теории автогенераторов и прикладные исследования по созданию все более мощных генераторов для применения их в системах радиосвязи.



Ли де Форест, американский инженер, изобретатель триода (1873 – 1961)



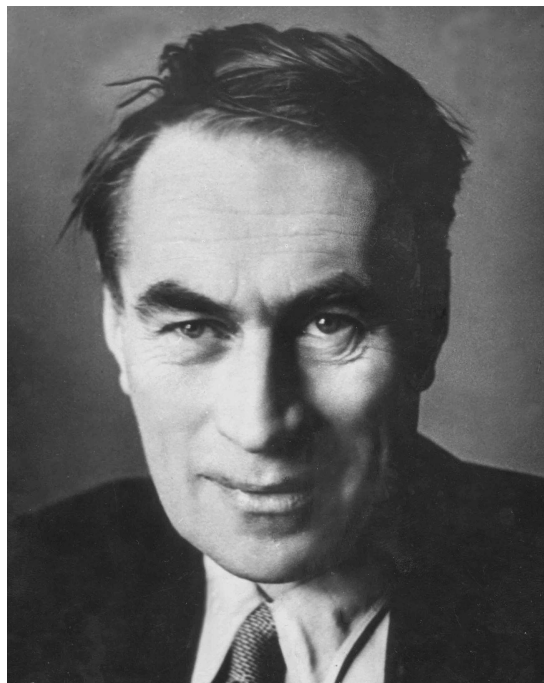
Михаил Александрович Бонч-Бруевич, радиотехник, основатель радиоламповой промышленности в СССР (1888 – 1940)

Важным шагом явилось открытие в 1918 году Нижегородской радиолaborатории, которую возглавил М.А. Бонч-Бруевич. Не будет большой ошибкой считать это событие днем рождения радиофизики в России. В лаборатории быст-

рыми темпами начались разработки ламповых усилителей и относительно мощных генераторов, модуляторов и детекторов. От теоретической радиофизики требовалось всестороннее исследование закономерностей всех процессов, происходящих в указанных устройствах. Важную роль сыграли работы голландского ученого Б. Ван дер Поля по математическому описанию работы генератора, который носит сейчас его имя. Огромный вклад в формирование и становление теоретической радиофизики внесли советские ученые Л.И. Мандельштам, А.А. Андронов, Г.С. Горелик, В.В. Мигулин, С.М. Рытов и другие.



Леонид Исаакович Мандельштам,
советский физик, один из
основателей отечественной
радиофизики (1879 – 1944)



Александр Александрович Андронов,
советский физик и математик,
создатель нового направления в
теории колебаний, один из
основателей отечественной
радиофизики (1901 – 1952)

Отметим интересный факт. В университетах Европы и Америки, так же как и в России, ведется подготовка студентов по специальностям “физика”, “математика”, “химия”, “биология” и другим общепринятым научным направлениям. Однако в них нет такой специальности как “радиофизика”. Эта наука появилась и успешно развивается только в России. На западе имеются самостоятельные специальности, такие как “электроника”, “радиотехника”, “техника СВЧ” и другие, которые в России являются разделами радиофизики. Они взаимно дополняют друг друга и обогащаются на общей фундаментальной основе радиофизики. Можно говорить, что радиофизика в определенном смысле является аналогом синергетики применительно к широкому спектру научных направлений, объединяемых в радиофизическую науку.

1.2 Классические научные проблемы радиофизики

Для обсуждения фундаментально научных и технических проблем, которые должны решаться в рамках радиофизики, обратимся к примеру. На рис. 1 представлена блок-схема передатчика и приемника, которая отражает основные элементы, входящие в любую радиостанцию, обеспечивающую передачу и прием информационных радиосигналов. Наш мобильный телефон, к которому все мы успели привыкнуть, имеет в принципе такое же устройство. Причем, мобильный телефон включает в себя объединенные в единый прибор как передатчик, так и приемник.

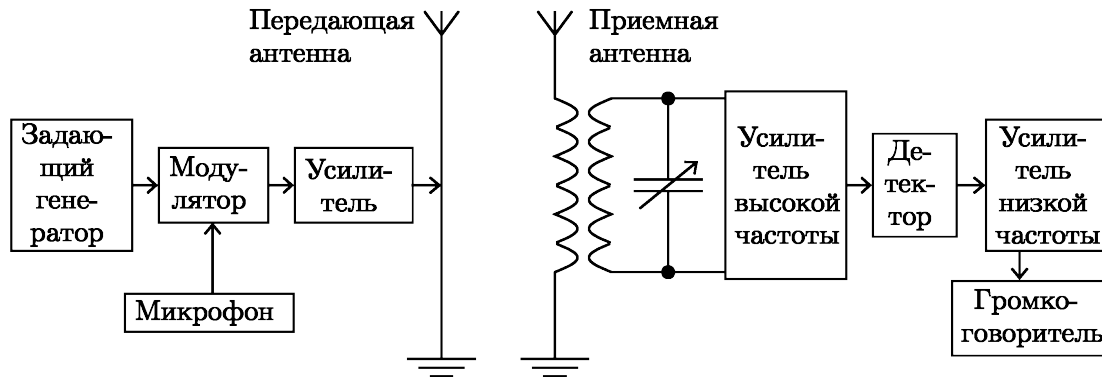


Рис. 1. Блок-схема передатчика и приемника радиосигналов

Давайте последовательно рассмотрим все элементы блок-схемы, показанной на рис. 1. Начнем с микрофона. Представленная схема описывает классическую радиосистему, предназначенную для передачи звуковых сигналов, таких как речь человека, музыка и др. В этом случае роль микрофона состоит в преобразовании звуковых сигналов в электрические. Совершенно ясно, что устройство такого преобразователя в общем виде будет существенно зависеть от типа и структуры информационного сигнала. Например, если информационным сигналом служит некоторое изображение, то микрофон не решит проблемы, понадобится видеокамера. Таким образом, в каждом конкретном случае должна решаться задача преобразования информационного сигнала в однозначно ему соответствующий электрический сигнал. Это одна из важных задач, которая и решается в рамках радиофизики. Для ее решения необходим анализ физических закономерностей, лежащих в основе реализации такого рода преобразований. В случае микрофона эта закономерность достаточно проста: под действием давления звуковых волн на входе в микрофон пропорционально меняется сопротивление прово-

дящего порошка и осуществляется управление проходящим в цепи микрофона током.

Теперь рассмотрим задающий генератор. Назначение генератора состоит в создании незатухающих электрических колебаний относительно высокой частоты, которые обеспечивают передачу информационных сигналов путем их излучения в атмосферу. В примере рис. 1 это генератор периодических, близких к гармоническим, колебаний радиодиапазона: длинноволновый, средневолновый и коротковолновый диапазоны на шкале ваших приемников. Принципиально важной задачей радиофизики является разработка общих теоретических основ генерации электромагнитных колебаний и волн. Эта задача включает как выявление физических закономерностей процессов генерации колебаний вне зависимости от конкретной частоты генератора, а также анализ принципиальных особенностей генерации колебаний различных частот. Имеются в виду особенности механизмов генерации и специфики их технической реализации. Например, разработка генераторов ультразвуковых колебаний, генераторов в системах радиовещания, генераторов радиолокационных станций и, наконец, генераторов оптического диапазона (лазеров) требует специальных подходов как теоретических, так и технологических. Как будет ясно в дальнейшем, генерация незатухающих колебаний возможна лишь в случае, когда система является диссипативной (характеризуется наличием потерь энергии) и, что очень важно, нелинейной. О нелинейности систем и процессов мы будем говорить позже в специальном разделе. Таким образом, одним из фундаментальных радиофизических направлений исследований является изучение вопросов гене-

рации электромагнитных колебаний в широком диапазоне частот.

Перейдем к описанию назначения и свойств модулятора. Назначение модулятора состоит в создании условий, при которых высокочастотный сигнал задающего генератора будет включать информационный сигнал. Роль высокочастотного сигнала заключается в обеспечении распространения информационного сигнала в атмосфере. Так как низкочастотные колебания не могут распространяться на большие расстояния, роль носителя информации играют высокочастотные колебания задающего генератора. В связи с этим колебания генератора выполняют роль несущей и служат для передачи информационного сигнала. Процесс введения информационного сигнала в высокочастотный называется *модуляцией*. Простейшим примером модуляции является амплитудная модуляция сигнала задающего генератора. Колебания генератора можно описать синусоидальной зависимостью:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \Phi), \quad (1)$$

где A – амплитуда, ω – частота и Φ – фаза гармонических колебаний. Сигнал информации с помощью модулятора управляет амплитудой колебаний и мы получаем зависимость $A(t)$, которая воспроизводит сигнал информации. Сигнал (1) остается высокочастотным и он способен распространяться в атмосфере. Способов модуляции несущей частоты достаточно много и они применяются в системах передачи информации с учетом конкретных требований и условий их работы. Как мы увидим в дальнейшем, процесс модуляции колебаний также является принципиально нелинейным.

Прежде чем осуществить передачу радиосигнала с помощью антенны в эфир, его, как правило, требуется усилить. Усиление необходимо по двум причинам: во-первых, сигнал задающего генератора не является достаточно интенсивным, что упрощает процесс модуляции; во-вторых, для обеспечения дальности работы системы радиосвязи излучаемый сигнал должен быть достаточно мощным. К усилителю предъявляются требования обеспечить высокий коэффициент усиления радиосигнала и при этом не допустить его искажений. Отсутствие искажений обеспечивается только в случае, когда усилитель работает в линейном режиме. Другими словами, когда радиосигнал на входе усилителя $x(t)$ преобразуется в выходной сигнал по линейному закону $kx(t)$, где k – постоянная величина, характеризующая коэффициент усиления.

Теперь перейдем к процессу излучения радиосигнала в атмосферу для передачи информации приемнику. Для этого необходимо использовать антенну. Антенна представляет собой устройство, которое преобразует электрические колебания в электромагнитные волны и излучает их в пространство. Антенна характеризуется коэффициентом преобразования, который отражает соотношение энергии колебаний на входе антенны к энергии, излучаемой в виде электромагнитных волн. Антенны различают как передающие, так и принимающие. Исключая специальные случаи, любая излучающая антенна может быть использована и как принимающая. Конструкция антенны формирует свою диаграмму направленности. Либо излучение распространяется от антенны (или принимается ею) по всем направлениям примерно с одинаковой интенсивностью, либо антенна формирует преиму-

ществленное направление распространения электромагнитных волн. Антенна мобильного телефона, к примеру, имеет сферически симметричную диаграмму направленности, что позволяет принимать сигналы с любой подстанции мобильной связи, и работает как на прием, так и на передачу одновременно. Но, например, антенны телевизионных приемников будут работать более эффективно при использовании антенн с узконаправленными диаграммами приема. Проблема направленности антенных диаграмм излучения – приема становится принципиально важной при осуществлении надежной космической радиосвязи.

Теперь необходимо принять радиосигнал с передающего устройства и выделить из него сигнал, содержащий информацию. Этой цели служит приемник. Сигнал с принимающей антенны, как правило, достаточно мал по мощности. Сигнал поступает на высокочастотный усилитель (рис. 1). Входная цепь усилителя содержит селективный элемент, представляющий собой обычный колебательный контур. Резонансная частота контура должна быть равной частоте задающего генератора передатчика (частоте несущей). Добротность контура подбирается максимально возможной. Но для сохранения информации необходимо обеспечить полосу частот пропускания колебательного контура, которая не должна быть меньше полосы частот информационного сигнала. Например, если мы передаем голосовые сообщения, то информационный сигнал содержит диапазон звуковых частот примерно от 10 Гц до 16 КГц. Это означает, что введением потерь необходимо обеспечить ширину резонансной кривой колебательного контура на уровне половинной мощности не менее 16 КГц. При вы-

полнении этих условий сигнал на входе усилителя не утратит содержащейся в нем информации. Усилитель должен удовлетворять определенным требованиям: он должен принимать и усиливать слабые сигналы, то есть обладать малым уровнем собственных шумов, работать в линейном режиме с целью неискаженной передачи информации и обеспечивать достаточное усиление, чтобы стало возможным провести детектирование радиосигнала.

Следующий этап заключается в решении проблемы выделения из высокочастотного промодулированного радиосигнала информационной составляющей. Этот процесс связан с *детектированием* или с *демодуляцией*. Необходимо отфильтровать высокочастотную компоненту из радиосигнала и выделить низкочастотную информационную составляющую. С этой целью используется детектор. Если ограничиться качественными рассуждениями, то процесс детектирования происходит следующим образом. Сначала радиосигнал пропускается через детектор. Нелинейная характеристика детектора такова, что на его выходе регистрируется та часть колебаний, которым отвечают только положительные величины амплитуды. Для отрицательных значений коэффициент передачи детектора равен нулю. Продетектированный сигнал будет представлять собой высокочастотные импульсы, амплитуда которых промодулирована сигналом информации. Затем необходимо отфильтровать высокочастотную компоненту. Для этого используют электронную цепь, содержащую активное сопротивление R и емкость C , которые соединяются параллельно. Так как сопротивление емкости резко уменьшается с ростом частоты (пропорционально $1/\omega C$), то для

достаточно больших значений частоты оно близко к нулю. В результате высокочастотная компонента замкнется через емкость и исчезнет из сигнала. Для низкочастотной компоненты сопротивление емкости практически бесконечно (емкость эквивалентна разрыву цепи), остается активное сопротивление и на нем будет выделено напряжение, пропорциональное сигналу информации.

Итак, мы получили информационный сигнал, которым были промодулированы колебания задающего генератора. Теперь его нужно усилить, используя линейный усилитель низких частот, до мощности, достаточной для работы динамика (громкоговорителя на рис. 1). В общем случае полученный информационный сигнал используется для представления информации в самой различной форме. Это может быть дисплей мобильного телефона, экран телевизора или что-то другое. Наконец отметим весьма важный факт: все без исключения элементы блок-схемы рис. 1 функционируют в условиях воздействия внутренних и внешних электрических помех. Внутренние шумы неустранимы, так как обусловлены дискретной природой носителей заряда. Заряженные частицы двигаются хаотически и вызывают флуктуации электрических зарядов. Следствием будут изменения характеристик всех без исключения элементов радиоустройств. Внешние шумы можно контролировать и понижать, но полностью их избежать удастся далеко не всегда. Так при распространении радиоволн в атмосфере на их свойства могут влиять случайные неоднородности (облачность, туманы), а также космические излучения.

Рассмотренный пример работы классической системы радиосвязи, конечно, не претендует на полное включение и описание научных проблем, составляющих предмет такой науки как радиофизика. Тем не менее, этот пример дает нам возможность понять, какими основными фундаментальными разделами научных знаний должен овладеть будущий специалист в области радиофизики. Начнем с генерации колебаний. Для рассмотрения вопросов генерации электромагнитных колебаний необходимо изучить такие дисциплины как “теория колебаний и волн”, “электродинамика сверхвысоких частот” и “электроника СВЧ”. Проблемы конструирования антенных устройств и распространения электромагнитных колебаний и волн требуют серьезных знаний по “теории излучения и распространения радиоволн”. Для понимания процессов усиления, преобразования колебаний, модуляции и детектирования необходимы знания по “теоретическим основам радиоэлектроники”, “электронным приборам” и “полупроводниковой электронике”. Для понимания роли флуктуаций в работе радиоустройств, вопросов обеспечения уверенного приема слабых сигналов, в достижении стабильности и когерентности генерируемых колебаний требуется изучение “статистической радиофизики” и “теории случайных процессов”. Вот перечень основных специальных дисциплин, которые входят в учебный план подготовки бакалавров по направлению “Радиофизика”. Отметим, что изучение указанных специальных дисциплин требует соответствующей подготовки по общей, теоретической физике и высшей математике. Ряд вопросов, касающихся подготовки по узкоспециальным научным проблемам радиофизики, читаются студентам по программам

так называемых специальных курсов (спецкурсов). Спецкурсы обеспечивают преподаватели и специалисты кафедр и читаются эти лекционные курсы, как правило, студентам, которые обучаются на конкретной кафедре. Таким образом, учебный план подготовки бакалавров по направлению “Радиофизика” включает три основных части: общеобразовательные физико-математические и гуманитарные дисциплины, общие специальные дисциплины радиотехнического профиля и перечень спецкурсов.

1.3 Нелинейность

Как было отмечено в разделе 1.2, ряд процессов в приемно-передающей системе радиосвязи (рис. 1) характеризуется нелинейными свойствами (генератор, модулятор, детектор). Что представляет собой нелинейность? Это чрезвычайно важное свойство процессов и явлений в живой и неживой природе, осознание которого привело к тому, что не только физику, но и современное естествознание сегодня можно именовать “нелинейными”! Чтобы уяснить понятие нелинейности, начнем с описания линейных процессов и систем.

Математический образ линейных преобразований – это линейная функция $y = F(x) = kx$, где коэффициент k равен константе. Зависимость $F(x)$ есть прямая линия на плоскости переменных (x, y) (рис. 2). Любое приращение переменной dx будет вызывать умноженное на k приращение dy . Другими словами, производная $dy/dx = k = \text{const}$ и не зависит от координаты x . Важным и полезным свойством линейных преобразований является то, что они подчиняются принципу суперпо-

зиции. Он состоит в следующем. Пусть аргумент $x = x_1 + x_2$. Легко убедиться, что в этом случае $F(x_1+x_2) = F(x_1)+F(x_2)$. Другими словами, если вы имеете сумму двух процессов и они подвергаются линейному преобразованию, то результатом будет сумма линейных преобразований каждого из них. Любая функция $F(x)$, отличающаяся от линейной функции, называется нелинейной. Например, пусть $F(x) = \sin x$. Сразу видна главная особенность нелинейных функций: приращение функции $F(x)$, отвечающее приращению аргумента x , будет зависеть от конкретного значения x , т.е., $dF(x)/dx = k(x)$! Другими словами, реакция нелинейной системы на воздействие существенно зависит от величины воздействия (рис. 2).

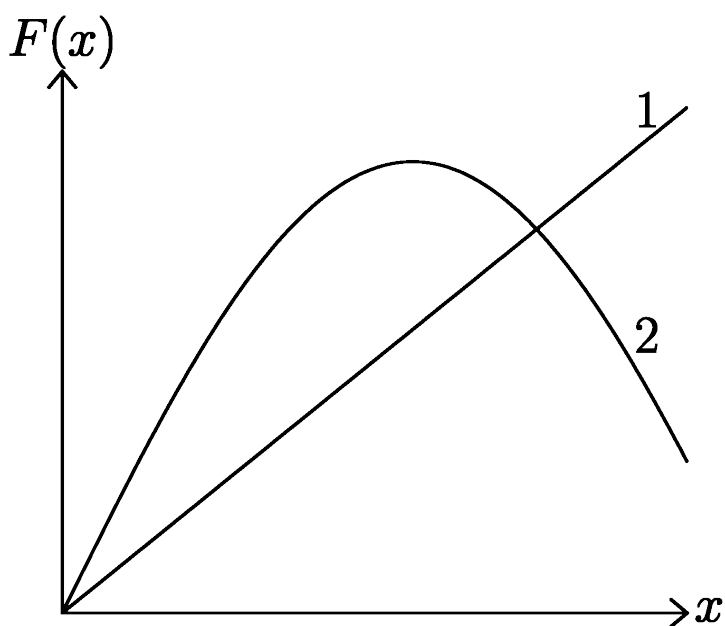


Рис. 2. Графическое изображение линейной функции $F(x) = kx$ (кривая 1) и нелинейной функции $F(x) = k(x)x$ (кривая 2)

Нелинейный характер подавляющего числа процессов и явлений в неживой и живой природе поистине неисчерпаемо многообразен. Примеров можно приводить очень много. Рас-

смотрим несколько из таких. Зададимся вопросом, почему в зимние холода вода в реках и озерах не промерзает до дна и сохраняет возможность обитания живых организмов? Ответ кроется в нелинейных свойствах воды. Известно, что зависимость плотности воды от температуры описывается нелинейной функцией, имеющей максимум вблизи температуры $T = +4^{\circ}C$ (рис. 3). Это означает, что при температуре $+4$ градуса вода наиболее тяжелая. Осенью с понижением температуры поверхностный слой воды охлаждается и при достижении 4-х градусов этот слой начинает медленно опускаться ко дну реки. На дне температура всегда выше, вода начинает нагреваться и постепенно поднимается к поверхности. Возникает циркуляция воды, которая препятствует ее замерзанию. Рыбы, раки и другие обитатели реки спокойно выживают.

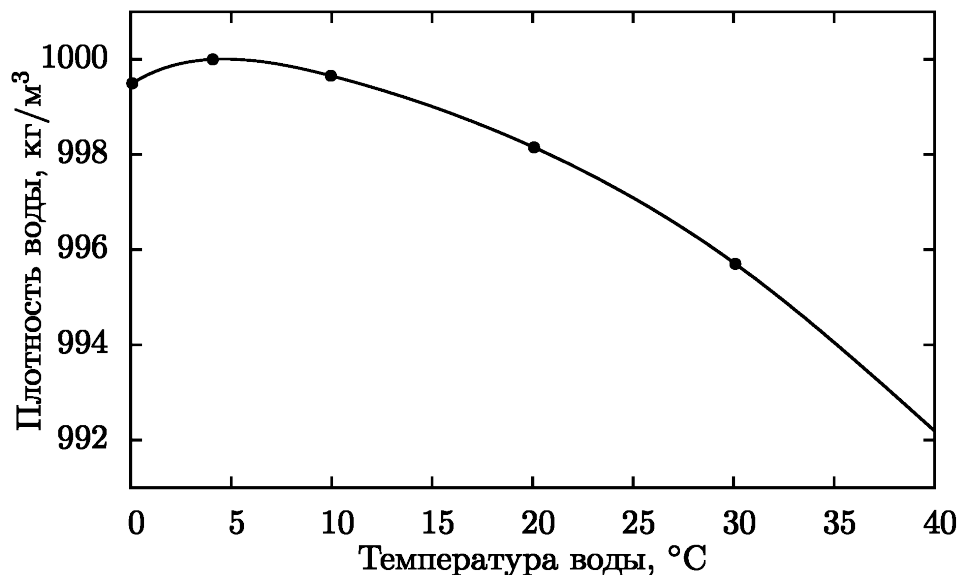


Рис. 3. Зависимость нормированной плотности воды от температуры

Другой пример — человеческий глаз. Глаза человека и животных представляют собой уникальный оптический прибор, обладающий очень высокой чувствительностью по отноше-

нию к внешним световым сигналам. Так, человеческий глаз отчетливо замечает свет от зажженной спички в ночной степи на расстоянии нескольких километров. Это обусловлено очень высоким коэффициентом усиления органов зрения. Если не регулировать коэффициент усиления, то при взгляде на яркий свет от электросварки человеческий глаз вышел бы из строя. Однако природа предусмотрела способ защиты зрения от перегрузок. Зрачок глаза уменьшается в размере с ростом интенсивности светового потока, снижая уровень входного сигнала. Таким образом, коэффициент усиления входного сигнала управляется самим входным сигналом, что возможно только для нелинейных процессов.

Приведем один из радиофизических примеров. Как следует из классического закона Ома, ток в цепи i , содержащей сопротивление R и источник напряжения V , подчиняется линейному закону $i = gV$, где g – проводимость, величина, обратная сопротивлению. Если рассмотреть зависимость анодного тока от величины напряжения на сетке в классическом триоде, то в общем случае эта зависимость будет принципиально нелинейной. Классический закон Ома для триода оказывается невыполнимым! Закон Ома в этом случае должен описываться по-другому: $i = g(V)V$, где проводимость $g(V)$ зависит от сеточного напряжения по нелинейному закону (рис. 4). Отметим, что впервые на этот факт примерно 100 лет назад обратил серьезное внимание академик СССР Л.И. Мандельштам, с именем которого связано формирование «нелинейного мышления» в физике и радиофизике.

Системы и процессы, включающие нелинейные преобразования, называются нелинейными. Именно с нелинейными си-

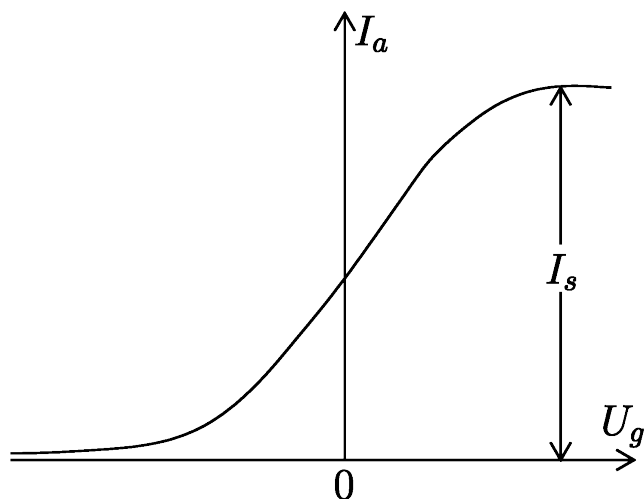


Рис. 4. Типичная нелинейная анодно-сеточная характеристика триода. I_a – ток в анодной цепи, U_c – напряжение на сетке триода

стемами связана возможность реализации удивительных по красоте сложных эффектов и явлений. Среди них и динамический хаос, и образование загадочных структур в нелинейных средах, фракталы и фрактальные структуры и большое число других.

Осознание важности и общности нелинейных преобразований при решении широкого спектра научных и технических проблем радиофизики привело сегодня к формированию самостоятельной науки, названной *нелинейной динамикой*. Предметом нелинейной динамики является теоретический и численный анализ динамики принципиально нелинейных систем и процессов. В работах в области нелинейной динамики сегодня активно принимают участие и математики, и физики, и химики, и представители других наук. Можно с уверенностью сказать, что существенным вкладом в развитие этого нового научного направления послужили работы отечественных радиофизиков. Нелинейная динамика в настоящее время стала междисциплинарной, как в свое время произошло

с теорией колебаний и синергетикой. И это понятно. Естествознание опирается на математическое описание процессов и явлений. Вне зависимости от конкретных наук приходится иметь дело с динамическими системами, которые описываются сходными нелинейными уравнениями. В рамках нелинейной динамики, так же как и в теории колебаний, осуществляется селекция нелинейных динамических систем по возрастающей степени сложности, которые описывают типичные нелинейные эффекты и процессы в системах самой различной природы. Но в сравнении с теорией колебаний нелинейная динамика базируется не только и не столько на теоретических результатах, а на результатах компьютерного моделирования. И это понятно: общей теории решения нелинейных дифференциальных уравнений пока не существует и вряд ли такая теория будет создана. В отличие от линейных уравнений, решение которых достаточно просто получается аналитически, решение нелинейных уравнений требует применения численных методов интегрирования с помощью компьютеров. Поэтому неотъемлемой составной частью нелинейной динамики является компьютерное моделирование систем и процессов, которые описываются принципиально нелинейными уравнениями. При этом необходимо развивать и обосновывать численные методы решения таких уравнений, которые позволяют получать с помощью вычислительной техники решения достоверные и с высокой точностью.

Познание идет по пути анализа нелинейных процессов во все более и более сложных динамических системах. Если на заре радиофизики и теории колебаний типичные эффекты и процессы иллюстрировались на примере систем ма-

лой размерности, то современные направления исследований в нелинейной динамике просто поражают воображение. Например, сегодня моделируются сложнейшие процессы колебаний и волн в больших нейронных ансамблях при исследованиях функционирования мозга человека. Постановке и возможности решения подобных задач способствует ошеломляющий прогресс в разработках быстродействующих компьютеров, способных за относительно короткое время счета получать надежные результаты применительно к сложнейшим системам.

1.4 Спектральное представление колебательных процессов

В радиофизике (и не только) широко используется представление периодических колебательных процессов $x(t)$ в виде совокупности простых гармонических функций. Для такого разложения можно выбрать и другие системы функций, но использование тригонометрических функций оказалось наиболее простым и практически удобным. Пусть колебательный процесс является периодическим: $x(t) \equiv x(t + T_0)$, где T_0 – период колебаний. Применительно к периодическим процессам доказана теорема:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega_0 t + B_n \cos n\omega_0 t), \quad (2)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Функция $x(t)$ должна удовлетворять некоторым математическим условиям, которые практически всегда выполняются. Главное, чтобы $x(t)$ была периодической с некоторым периодом T_0 .

Выражение (2) можно записать в ином виде:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n), \quad (3)$$

где $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}$.

Выражения (2) и (3) описывают ряды Фурье, которые представляют любую периодическую функцию в виде бесконечных сумм гармонических составляющих с частотами $n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Наиболее часто используется ряд Фурье (3). Гармонические составляющие в выражении (3)

$$C_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

называют *спектром Фурье периодической функции $x(t)$* . Совокупность величин C_n образует спектр амплитуд, а совокупность величин φ_n – спектр фаз. Из (2) и (3) следует, что любой периодический процесс частоты ω_0 представляет собой сумму гармонических составляющих с дискретным рядом частот $n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Составляющие спектра с частотами $n\omega_0$ ($n = 2, 3, \dots$) называют *гармониками основной частоты ω_0* . Спектр амплитуд $C_n(n\omega_0)$ на графике выглядит как это показано на рис. 5.

Пунктирная огибающая $F(\omega)$ на рис. 5 характеризует спектральное распределение амплитуд и называется *спектральной функцией*.

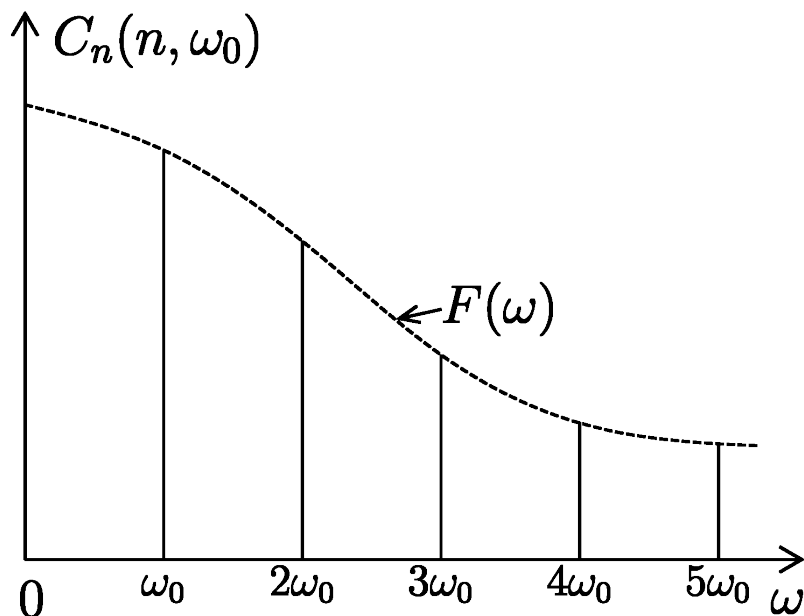


Рис. 5. Спектр амплитуд некоторого процесса $x(t) \equiv x(t+T)$, $T = 2\pi/\omega_0$

С чем связано удобство выбора гармонических функций $\cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$ в виде базисной системы функций в разложении (3)? Ответ на этот вопрос поясним на простом примере. Рассмотрим схему, представленную на рис. 6.

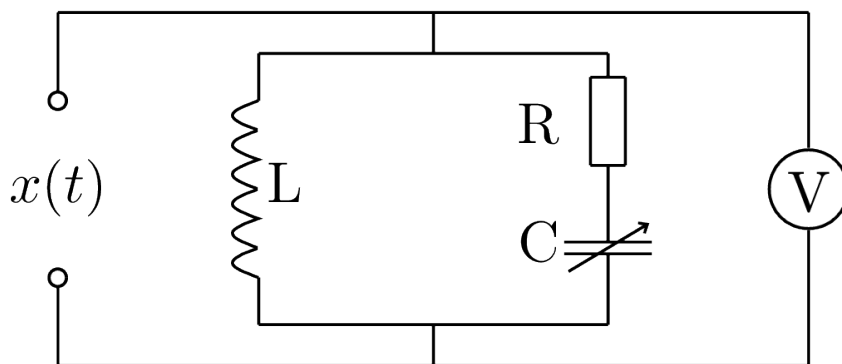


Рис. 6. Схема, позволяющая анализировать спектральный состав входного сигнала в эксперименте

На данном рисунке $x(t)$ – сложный периодический сигнал со спектром $C_n(n\omega_0)$, LRC – колебательный контур, емкость которого допускает перестройку в определенных пределах, V

– вольтметр, измеритель напряжения. Из школьного курса физики известно, что колебательный контур развивает максимальную амплитуду колебаний в момент резонанса, когда частота воздействия совпадает с собственной частотой контура $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Вначале, изменяя емкость C , настроим контур на частоту $\omega_0 = 1/T_0$, где T_0 – период колебаний $x(t)$. Напряжение V будет максимальным. Далее начнем плавно уменьшать емкость, увеличивая резонансную частоту контура. Следующий максимум напряжения, как покажет эксперимент, будет зафиксирован на частоте $2\omega_0$. В промежутке частот от ω_0 до $2\omega_0$ напряжение V будет близко к нулю, так как спектр сигнала $x(t)$ не содержит этих частот. Продолжая увеличивать частоту контура, мы получим зависимость $V(\omega) = V(n\omega_0)$, аналогичную рис. 5.

Таким образом, разложение по гармоническим функциям (2) и (3) дает достаточно простой и практически реализуемый способ построения приборов для анализа спектрального состава периодических колебаний с использованием резонансных эффектов в колебательном контуре.

Рассмотрим, что произойдет, когда колебания $x(t)$ будут непериодическими? В этом случае можно говорить о том, что “период” непериодической функции $x(t)$ стремится в бесконечность: $T_0 \rightarrow \infty$. Из выражения $T_0 = 2\pi/\omega_0$ следует, что при $T_0 \rightarrow \infty$ ω_0 будет стремиться к нулю: $\omega_0 \rightarrow 0$. При этом расстояние между спектральными линиями $n\omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) будет также стремиться к нулю. Спектр Фурье из набора дискретных составляющих $n\omega_0$ превратится в непрерывный и будет содержать все частоты в некотором диапазоне. Характеристикой сплошного спектра будет слу-

жить спектральная функция распределения амплитуд спектра, представленная на рис. 5 в виде огибающей. Доказано, что для непериодического сигнала $x(t)$ вместо ряда Фурье мы получим интеграл Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (4)$$

Здесь $F(\omega)$ есть спектральная функция распределения амплитуд спектра функции $x(t)$. Входящая в выражение (4) функция $\exp(j\omega t)$ есть экспонента, которая определяется как

$$\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (5)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Замечательно, что можно доказать справедливость обратного преобразования:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (6)$$

Выражения (4) и (6) называют парой интегральных преобразований Фурье, которая определяет однозначную связь между непериодической функцией $x(t)$ и соответствующей спектральной функцией $F(\omega)$. Функция $F(\omega)$ – величина комплексная, так как $\exp(j\omega t)$ – комплексная (85). В физике часто используют величину $S(\omega)$, которая определяется как

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2$$

и называется *спектром мощности*. Спектр мощности $S(\omega)$ есть действительная величины, которая уже не содержит информации о фазе колебаний и характеризует не амплитуду, а интенсивность (мощность) колебаний на частоте ω в спектре процесса $x(t)$.

Спектральный анализ колебательных процессов прочно вошел в число методов, применяемых для исследований в радиофизике и физике в целом. Взаимная однозначность структуры спектров и свойств колебаний служит основанием, чтобы в процессе мышления специалист мог в равной степени оперировать спектрами как образами соответствующих им типам колебательных процессов. В результате специалисты в области радиофизики часто мыслят спектрами Фурье, а не временными реализациями колебательных процессов. И такие примеры известны из истории физики. Так, например, подчеркивая уникальные способности физика-теоретика Арнольда Зоммерфельда, его коллеги говорили, что он способен мыслить контурными интегралами. Контурные интегралы описывают интегралы от функций комплексного переменного и, также как и интеграл Фурье (6), являются интегральными преобразованиями.

1.5 Генерация колебаний

Рассмотрим общую проблему генерации незатухающих колебаний. Создать генератор можно, используя усилитель с положительной обратной связью. Примером служит эффект самовозбуждения усилителей, с которым каждый из нас не раз сталкивался, присутствуя в концертном зале. Исполнитель, в руках которого находится микрофон, нечаянно может направить его на выход звуковой колонки, которая воспроизводит усиленный сигнал с микрофона. Сигнал от звуковой колонки через микрофон поступит на вход усилителя, будет усилен и вновь поступит на вход. Возникает положитель-

ная обратная связь. Из колонок вырывается оглушающий и неприятный шум, треск и свист. Интенсивность этого шума за счет нелинейности усилителя ограничивается на максимальном уровне. Возникает генерация шумоподобных колебаний. За счет чего происходит самовозбуждение усилителя? Причиной является возникновение обратной связи, когда часть сигнала с выхода усилителя вновь возвращается на его вход. Так как усилитель должен обеспечивать качественное воспроизведение сигнала во всем диапазоне звуковых частот, то он имеет полосу усиливаемых частот в звуковом диапазоне $10 \text{ Гц} \leq f_0 \leq 16000 \text{ Гц}$. Поэтому при самовозбуждении мы слышим такой неприятный звук, спектр которого практически сплошной в звуковом диапазоне.

Как же обеспечить возможность генерации “хороших” колебаний, например, близких к гармоническим? Для этого на вход усилителя нужно включить селективный элемент, например, колебательный контур, и ввести цепь обратной связи с возможностью регулировки уровня сигнала. Но этого будет недостаточно. Регулируя уровень сигнала обратной связи, мы обеспечиваем выполнение так называемых амплитудных условий возникновения генерации. Но необходимым также является выполнение фазовых условий. Что это означает? Вспомните катание на качелях. Чтобы ваш партнер совершал установившиеся колебания, качели нужно подталкивать с определенной силой – это первое условие. Но при этом моменты подталкивания необходимо синхронизовать с “фазой” колебаний качелей, например, когда качели начинают опускаться с точки максимального отклонения. Толкать качели нужно в направлении их движения, но не наоборот. Это –

второе условие. В этом примере амплитудное условие – это сила вашего толчка, а фазовое – синхронизованное с процессом колебаний приложение этой силы.

А теперь рассмотрим конкретную электронную схему генератора, которая реально воплощает сказанное выше. Нам понадобится усилитель, в качестве которого выберем трех-электродную лампу, называемую триодом (см. рис. 7,а). В силу близкого к катоду расположения сетки в триоде при подаче даже малого напряжения U_g на сетку в анодной цепи будет возникать анодный ток I_a .

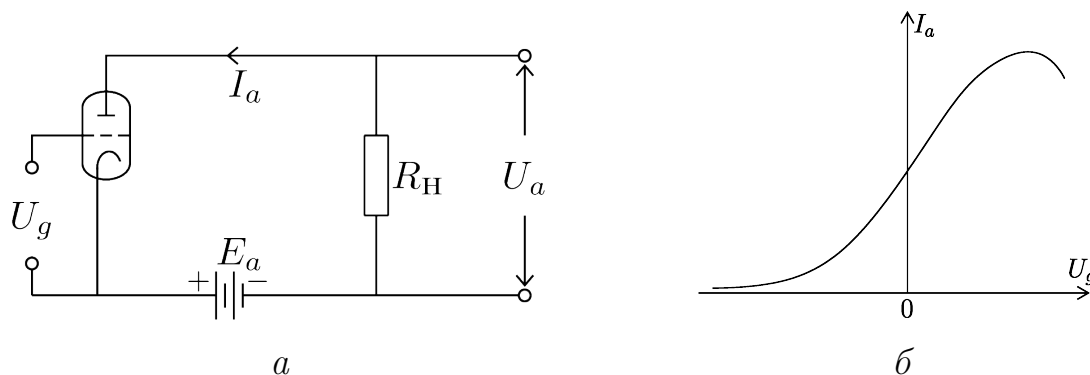


Рис. 7. Схема усилителя на триоде (а), анодно-сеточная характеристика триода (б)

Зависимость анодного тока I_a от напряжения на сетке U_g представлена на рис. 7,б. Анодный ток, протекая через сопротивление нагрузки R , вызовет падение напряжения U_a . При этом коэффициент усиления будет равен $k = U_a/U_g$. Анодно-сеточная характеристика триода (рис. 7,б) нелинейна и коэффициент усиления будет зависеть от U_g : $k = f(U_g)$. С увеличением U_g коэффициент k будет уменьшаться, что обеспечит нам нелинейное ограничение. Нелинейное ограничение, как мы увидим, является необходимым условием уста-

новления устойчивых колебаний с некоторой фиксированной амплитудой.

Теперь подключим ко входу усилителя (в сеточную цепь триода) селективный элемент, в качестве которого выберем RLC колебательный контур. Для получения периодических колебаний, близких к гармоническим, колебательный контур должен быть высокодобротным (сопротивление потерь R должно быть малым). Тогда резонансная кривая контура будет очень узкой и можно считать, что он откликается только на частоты, близкие к резонансной $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll 1$. Для обеспечения условий генерации введем обратную связь, как это показано на рис. 8.

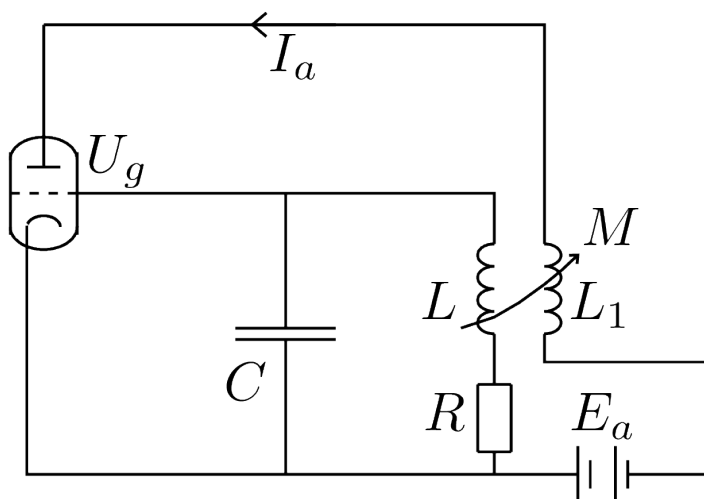


Рис. 8. Схема генератора на триоде (генератор Ван дер Поля) с контуром в цепи сетки

Положительная обратная связь введена за счет использования взаимной индуктивности катушке L и L_1 . Коэффициент взаимной индукции M будет управлять уровнем положительной обратной связи. Так как колебания в генераторе близкие к гармоническим, то ток I_a также будет меняться по гар-

моническому закону и создавать переменное магнитное поле в катушке L_1 . Это поле будет индуцировать переменное напряжение на индуктивности L , часть которого будет воздействовать на сетку триода (U_g). Для поддержания незатухающих колебаний в генераторе (соответственно в RLC -контуре) необходимо компенсировать потери, обусловленные рассеиванием энергии на активном сопротивлении R . Эту проблему решает обратная связь. Выбором величины M мы можем регулировать уровень энергии, поступающей в контур за счет взаимной индукции. Таким образом, имеется возможность компенсации потерь и выполнения амплитудных условий поддержания колебаний. А как решается проблема фазовых условий? За их выполнение отвечает взаимодействие электромагнитного поля в связанных катушках индуктивности. Расположение катушек L и L_1 подбирается таким образом, чтобы подкачка энергии в контур за счет протекающего анодного тока управлялась в противофазе с анодным напряжением триода.

Уравнения генератора Ван дер Поля можно получить на основании закона Кирхгофа. Рассмотрим замкнутый RLC -контур в цепи сетки триода на рис. 8. Сумма падений напряжений на элементах контура должна быть равной нулю, так как контур не содержит источника напряжения. Ток $I = -C \frac{dU_g}{dt}$, падение напряжения на сопротивлении R будет $RI - L \frac{dI}{dt} - M \frac{dI_a}{dt}$. Здесь $L \frac{dI}{dt}$ — напряжение, возникающее на катушке индуктивности контура L за счет колебаний тока $\frac{dI}{dt}$. Величина $M \frac{dI_a}{dt}$ есть напряжение, которое наводится в контуре изменениями анодного тока $\frac{dI_a}{dt}$ и с коэффициентом взаимной индукции M действует в RLC -контуре. Сумма всех падений

напряжения в контуре будет равна нулю:

$$LC \frac{d^2 U_g}{dt^2} - \left(M \frac{dI_a}{dt} - RC \right) \frac{dU_g}{dt} + U_g = 0. \quad (7)$$

Величина $\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dU_g} \cdot \frac{dU_g}{dt} = S(U_g) \frac{dU_g}{dt}$, где $S(U_g)$ называется *крутизной* анодно-сеточной характеристики триода и характеризует его коэффициент усиления. За счет нелинейности коэффициент усиления зависит от напряжения на сетке $S(U_g)$ (см. рис. 7,б). Получаем уравнение

$$LC \frac{d^2 U_g}{dt^2} - (MS(U_g) - RC) \frac{dU_g}{dt} + U_g = 0. \quad (8)$$

Если предположить, что анодно-сеточную характеристику триода можно аппроксимировать кубическим полиномом $I_a = I_0 + S_0 U_g - \frac{S_1}{3} U_g^3$, то получим

$$S(U_g) = \frac{dI_a}{dU_g} = S_0 - S_1 U_g^2. \quad (9)$$

Вводя обозначения

$$\alpha = (MS_0 - RC)/LC, \quad \beta = 2MS_1/(RC - MS_0), \quad \omega_0^2 = 1/LC \quad (10)$$

и переходя к безразмерным величинам напряжения, параметров и времени

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = \sqrt{\beta} \cdot U_g, \quad \varepsilon = \alpha \omega_0, \quad (11)$$

получаем классическую форму записи уравнения генератора Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2}. \quad (12)$$

Уравнение Ван дер Поля содержит единственный управляющий параметр $\varepsilon = \alpha \omega_0$, где $\alpha = (MS_0 - RC)/\omega_0$. Видно, что

параметр ε включает два слагаемых: положительное MS_0 , которое отвечает за долю энергии, вносимую в контур за счет обратной связи, и отрицательное $-RC$, которое учитывает потери в контуре. В зависимости от значений этих слагаемых параметр ε может быть как положительным (доля вносимой энергии превышает потери), так и отрицательным (потери превышают подкачку энергии). Поэтому в теории генератора параметр ε называют параметром возбуждения. Исследования показали, что в случае $\varepsilon > 0$ в генераторе реализуется режим незатухающих периодических колебаний. К этому вопросу мы вернемся в последующих разделах.

Сейчас постараемся дать качественную трактовку режиму генерации в схеме рис. 8. Рассмотрим колебательный контур с потерями (без учета воздействия обратной связи, $M = 0$) в цепи сетки генератора (рис. 8). На основании закона Кирхгофа напомним уравнения для суммы падений напряжений:

$$\begin{aligned} U_C + U_R + U_L &= 0, \\ \frac{q}{C} + IR + L\frac{dI}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где q – заряд на конденсаторе. Учитывая, что $I = dq/dt$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Переобозначая $q = x$, $\frac{R}{L} = \alpha$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, получаем уравнение для диссипативного контура:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (15)$$

Если $\alpha = 0$ (потери отсутствуют), то (15) описывает линейный осциллятор без потерь и переменная x совершает гармонические колебания $x(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, в чем можно убедиться прямой подстановкой $x(t)$ в уравнение (15) при условии $\alpha = 0$. Наличие малых потерь ($\alpha < 1$) приводит к решению в виде затухающей синусоиды. В этом легко убедиться на примере колебаний математического маятника в воздушной среде, то есть при наличии малого трения о воздух. Если потери будут отрицательными ($\alpha < 0$), то решение уравнения (15) представляет синусоиду с нарастающей амплитудой. Таким образом, характер решения (15) зависит от знака второго члена в уравнении, который описывает влияние трения (или потерь).

Давайте сравним уравнения (12) и (15) с точки зрения членов, отвечающих за потери. В (12) это величина $-\varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$, в (15) она равна $\alpha\dot{x}$. Будем считать $\varepsilon > 0$. Слагаемое потерь в (12) описывается нелинейной функцией, а в (15) – линейной! Что это означает? При $x < 1$ эффективное трение в (12) становится отрицательным и $x(t)$ начинает возрастать во времени, как в (15) при $\alpha < 0$. С ростом амплитуды колебаний достигается режим $x(t) > 1$ и трение становится положительным. Колебания начинают затухать. Амплитуда колебаний $x(t)$ в (12) управляет величиной эффективного трения в силу нелинейности. В результате в генераторе устанавливается режим незатухающих колебаний, при котором полпериода трение отрицательное, а в следующий полпериод колебаний трение положительное. Генератор автоматически подстраивается в режим, при котором средняя за период величина $-\varepsilon(1 - x^2)$ обращается в нуль и система ведет себя как осцил-

лятор без потерь, генерируя колебания близкие к гармоническим.

1.6 Модуляция высокочастотных колебаний

Задающий генератор в системе радиосвязи (рис. 1) создаст высокочастотные колебания частоты ω_0 , которые приближенно можно считать гармоническими. Для передачи информации необходимо ввести информационный низкочастотный сигнал в колебания несущей частоты. В этом случае высокочастотный сигнал, включающий сигнал информации, будет способен распространяться в атмосфере. Существует несколько способы введения информационного сигнала в высокочастотные колебания, которые описываются синусоидальным процессом:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что процесс введения информации можно обеспечить тремя способами: за счет модуляции амплитуды $A = A(t)$, частоты $\omega_0 = \omega_0(t)$ и фазы $\varphi = \varphi(t)$. Зависимости амплитуды, частоты и фазы должны полностью соответствовать информационному сигналу, который требуется передать. Рассмотрим более подробно процесс амплитудной модуляции. Для простоты будем считать, что информационный сигнал представляет собой гармоническое колебание $U_c = U_c \cos \Omega t$, а сигнал несущей – $U = U_0 \sin \omega_0 t$. Частота несущей $\omega_0 \gg \Omega$. Тогда амплитудно-модулированный сигнал $U_m(t)$ можно представить в виде:

$$U_m = (U_0 + U_c \cos \Omega t) \sin \omega_0 t = U_0(1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (17)$$

Параметр $m = U_c/U_0$ называют глубиной модуляции.

Используя формулы тригонометрии, уравнение (17) перепишем в виде:

$$U_m = U_0 \sin \omega_0 t + \frac{mU_0}{2} \sin [(\omega_0 + \Omega)t] + \frac{mU_0}{2} \sin [(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (18)$$

Обратим внимание на следующий факт. В выражении (18) присутствуют сигналы трех частотных составляющих: ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$. Если в начале мы имели сигналы частоты ω_0 и Ω , то в процессе модуляции возникли две новые частоты: $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Это связано с тем, что процесс модуляции представляет собой принципиально нелинейное преобразование. Как видно из (17), необходимо перемножить сигналы двух различных частот. Как мы покажем ниже, это возможно только с использованием нелинейности, которая обязательно должна присутствовать в модуляторе. Любое линейное преобразование не изменяет спектра сигнала в том смысле, что спектральный состав сигнала до и после преобразования сохраняется. Амплитуды и фазы спектральных составляющих могут меняться. Однако появление новых частот в спектре возможно исключительно вследствие нелинейного преобразования.

Сказанное выше иллюстрирует рис. 9, где представлены временные реализации сигнала несущей (а), гармонического сигнала модуляции (б), амплитудно-модулированный сигнал (в) и соответствующие спектры.

Важно отметить следующее. Спектр амплитудно-модулированного сигнала расположен в высокочастотной области в окрестности несущей частоты. Это означает, что модулиро-

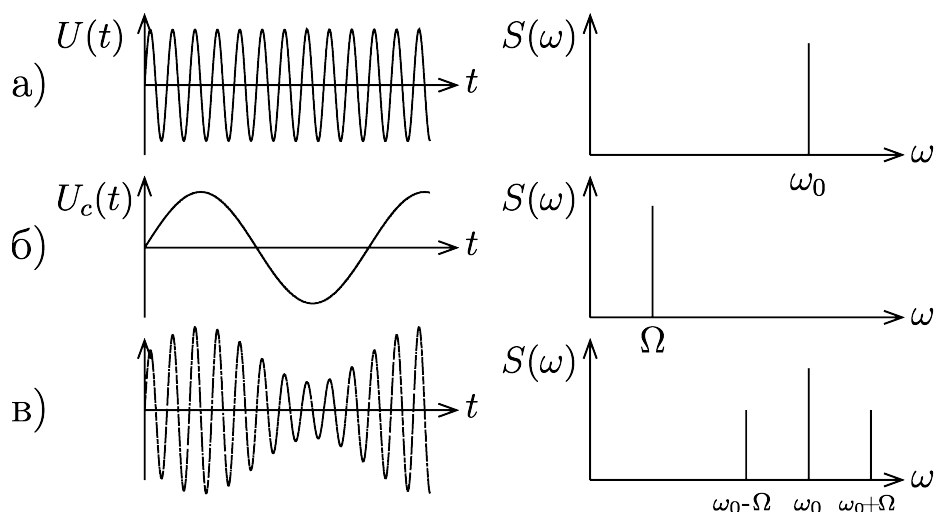


Рис. 9. Иллюстрация амплитудной модуляции

ванный сигнал является высокочастотным и может быть излучен в эфир!

В реальности информационный сигнал не является гармоническим. Если провести спектральный анализ звуковых сигналов, которые отвечают речи диктора на радио, сигналов музыкальных произведений (оркестр, исполнитель песен и др.), то выяснится следующее. Во-первых, эти сигналы содержат спектральные компоненты всего звукового диапазона. Во-вторых, эти сигналы не являются периодическими и характеризуются непрерывным спектром. В результате амплитудной модуляции сигнала несущей сложным информационным звуковым сигналом мы получим картину, представленную на рис. 10.

Как видно из (16), для передачи информации помимо амплитудной, можно использовать частотную и фазовую модуляцию. Выбор того или иного способа диктуется конкретными техническими требованиями к системе радиосвязи. Наиболее часто в технике связи применяется именно амплитуд-

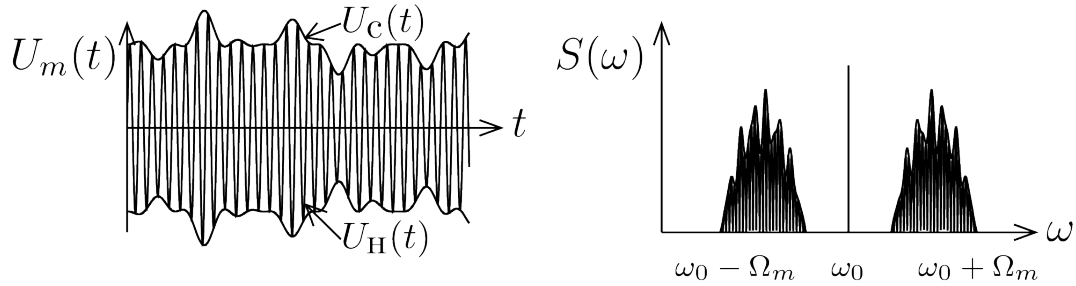


Рис. 10. Иллюстрация амплитудной модуляции $U_m(t)$ сложным непериодическим сигналом $U_c(t)$

ная модуляция. Одной из главных причин является то, что полоса спектра при амплитудной модуляции ($\omega_0 - \Omega_{\min} \leq \Delta\omega \leq \omega_0 + \Omega_{\max}$, рис. 10) является относительно узкой. Так, например, если система (рис. 1) работает на частоте несущей $\simeq 1000$ МГц, то $\Delta\omega/\omega_0 \simeq 10^{-5}$. Это позволяет разместить большое количество радиопередающих каналов связи так, чтобы их диапазоны не перекрывались.

Рассмотрим, как на практике можно реализовать процесс амплитудной модуляции сигнала несущей частоты. Как уже упоминалось, процесс модуляции требует нелинейного преобразования, что обусловлено необходимостью обеспечить перемножение двух сигналов разных частот (см. формулу (17)). Существует много разных способов решения задачи модуляции с использованием различных нелинейных преобразователей. Остановится на одном из них. Наша задача состоит в следующем. В распоряжении нам задан сигнал несущей $U_0 \sin \omega_0 t$ и сигнал информационный $U_c \sin \Omega t$. Их спектры содержат две спектральные линии на частотах ω_0 и Ω . Нам необходимо при помощи некоторого нелинейного преобразования получить сигнал, который включает частоты ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$, то есть амплитудно-модулированный сигнал $U_m(t)$ (рис. 9). Выберем

наиболее простое нелинейное преобразование в виде полинома второй степени:

$$i = I_0 + \alpha U + \beta U^2. \quad (19)$$

Характеристика (19) описывает ток $i(t)$ в нелинейном элементе в зависимости от приложенного напряжения $U(t)$. В качестве приложенного напряжения возьмем сумму:

$$U(t) = U_0 \sin \omega_0 t + U_c \sin \Omega t. \quad (20)$$

Подставим (20) в (19) и после несложных арифметических преобразований получим, что выходной сигнал будет содержать:

постоянную составляющую

$$I_0 + \beta \left(\frac{U_0^2}{2} + \frac{U_c^2}{2} \right), \quad (21)$$

переменные компоненты исходных частот ω_0 и Ω , которые остались за счет линейного члена в (19),

$$\alpha U_0 \sin \omega_0 t + \alpha U_c \sin \Omega t, \quad (22)$$

компоненты удвоенных частот

$$-\frac{U_0^2}{2} \cos 2\omega_0 t - \frac{U_c^2}{2} \cos 2\Omega t \quad (23)$$

и компоненты, включающие суммарную и разностные частоты,

$$\beta U_0 U_c \cos(\omega_0 + \Omega)t + \beta U_0 U_c \cos((\omega_0 - \Omega)t). \quad (24)$$

Спектральный состав колебаний в результате нелинейного преобразования (19) показан на рис. 11 и включает 6 спектральных линий.

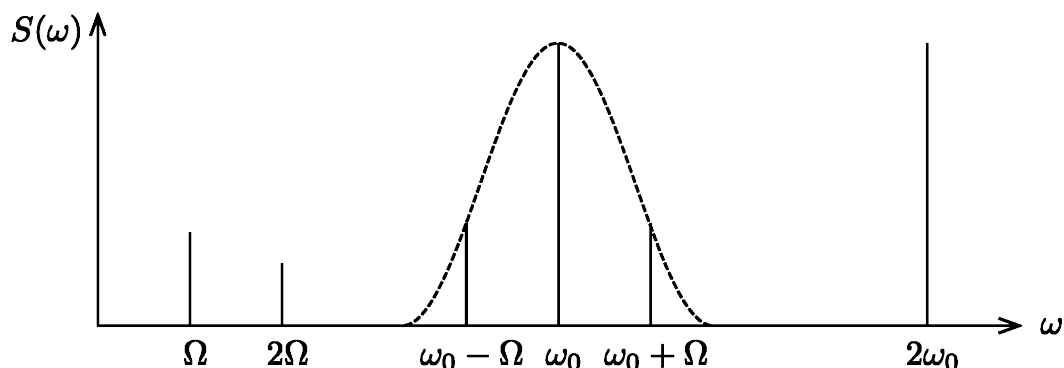


Рис. 11. Спектр сигнала в результате нелинейного преобразования (19)

Как видно из рис. 11, интересующий нас спектр с линиями ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$ расположен на достаточном удалении как от низкочастотных компонент Ω и 2Ω , так и от высокочастотной $2\omega_0$. Для получения нужного нам сигнала U_m необходимо избавиться как от низкочастотных ($\Omega, 2\Omega$), так и высокочастотной ($2\omega_0$) компонент спектра. Это достигается фильтрацией сигнала с помощью полосового фильтра, характеристика которого нанесена на рис. 11 пунктирной линией.

Схема реализации описанного модулятора представлена на рис. 12.

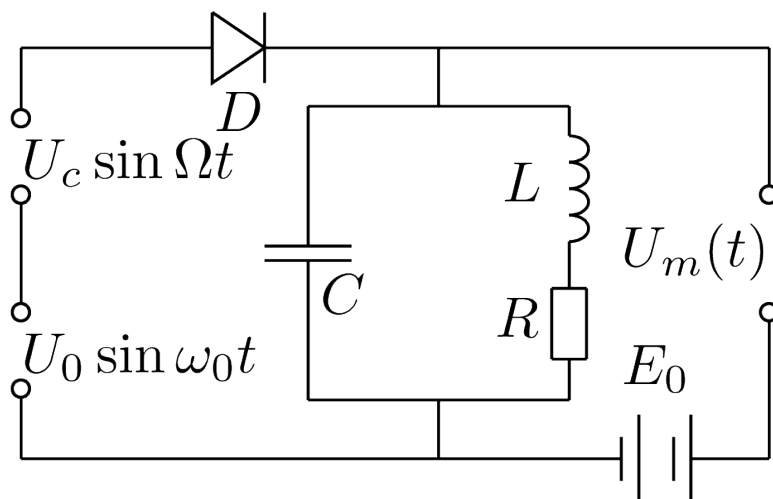


Рис. 12. Схема модулятора

В качестве нелинейного преобразователя с характеристикой, близкой к (19), используется полупроводниковый прибор D . В качестве фильтра применен колебательный RLC -контур. Резонансная кривая колебательного контура должна обеспечивать ширину полосы пропускания $\Delta\omega \gtrsim 2\Omega$.

1.7 Детектирование модулированных колебаний

После приема и усиления радиосигнала, который представляет собой сигнал несущей частоты ω_0 , промодулированный по амплитуде информационным сигналом, необходимо выделить сигнал информации. Этот процесс называется *детектированием* (или демодуляцией). Процесс детектирования сопровождается существенным изменением спектра колебаний. Промодулированный сигнал содержит в спектре высокие частоты ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$, а после детектирования мы должны получить сигнал низкой частоты Ω , которая не содержится в спектре принятого сигнала. Это возможно осуществить только с использованием нелинейного преобразования. Таким образом, процесс детектирования является принципиально нелинейным.

В общем случае для детектирования можно применить нелинейный преобразователь с квадратичной нелинейностью (19), который был использован нами для осуществления модуляции. Преобразование (19) приведет к появлению в спектре набора частот, представленного на рис. 11. Как видно из этого рисунка, спектр будет включать информационный сиг-

нал частоты Ω , который можно выделить с использованием низкочастотного полосового фильтра.

Для наглядности рассмотрим более простой и понятный способ детектирования с использованием однополупериодного линейного детектора, характеристика которого показана на рис. 13.

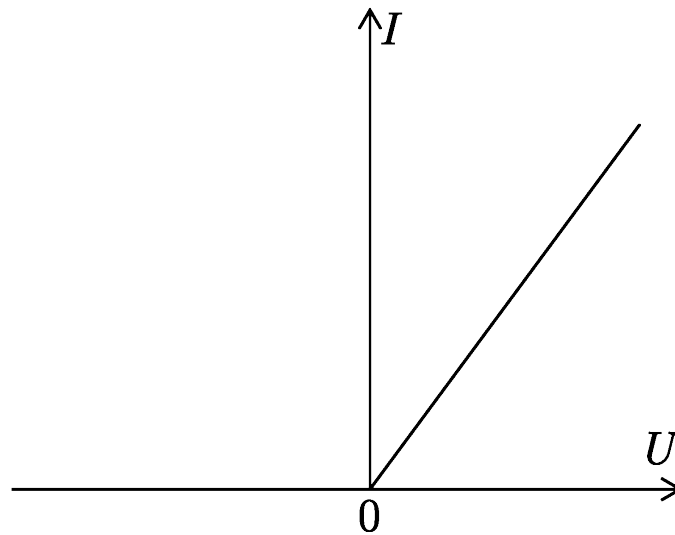


Рис. 13. Вольт-амперная характеристика линейного детектора

Несмотря на то, что для положительных значений $U > 0$ ток растет по линейному закону $I = kU$, характеристика детектора является нелинейной. Это связано с тем, что $I = 0$, если $U \leq 0$. Рассмотрим схему на рис. 14.

Схема содержит линейный детектор D и RC -фильтр. Преобразование амплитудно-модулированного сигнала $U_m(t)$ в информационный сигнал $U_c \cos \Omega t$ показано на рис. 15. Под воздействием напряжения $U_m(t)$ ток через детектор будет проходить только в случае, когда $U_m(t) > 0$. Отрицательные значения напряжения $U_m(t) < 0$ вызовут ток, равный нулю.

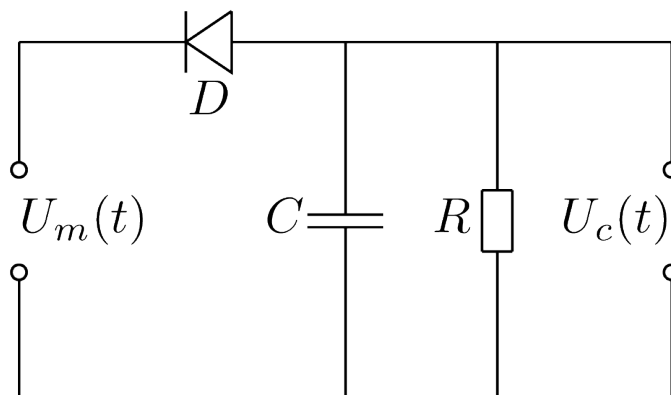


Рис. 14. Схема для детектирования

На выходе детектора ток воспроизведет лишь положительные полупериоды $U_m(t)$ (рис. 15,б).

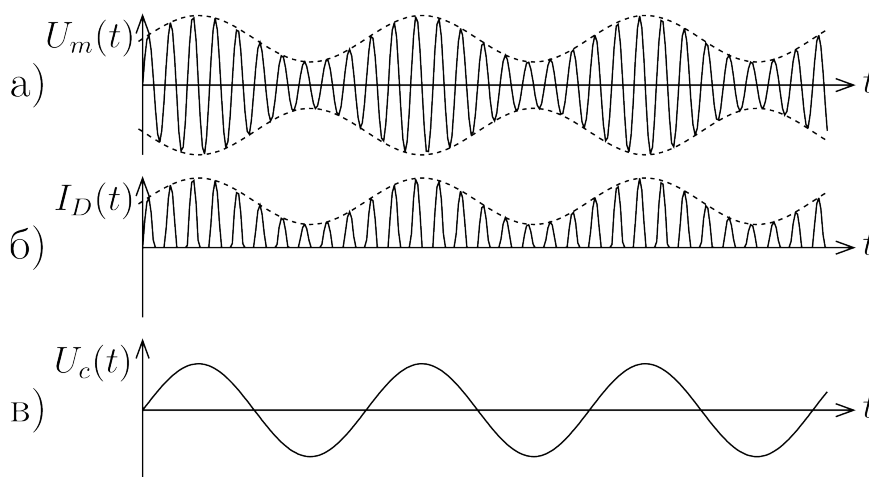


Рис. 15. Преобразование амплитудно-модулированного сигнала $U_m(t)$ в информационный сигнал $U_c(t)$. (а) – амплитудно-модулированный сигнал, (б) – ток на выходе детектора, (в) – информационный сигнал

Высокочастотная компонента сигнала не будет пропущена RC -фильтром, так как сопротивление конденсатора C для высокой частоты ω_0 близко к нулю. Низкочастотная (информационная) компонента будет выделяться на сопротивлении R , так как для нее емкость представляет близкое к бесконечности сопротивление. Таким образом, с использованием

однополупериодного линейного детектора и низкочастотного фильтра мы реализуем выделение информационного сигнала из высокочастотного амплитудно-модулированного сигнала.

1.8 Резонанс в линейном контуре

Из школьного курса физики известно, что при периодическом воздействии с частотой ω на колебательную систему с собственной частотой ω_0 наблюдается явление резонанса. Резонанс наступает при условии $\omega \simeq \omega_0$, когда наблюдается резкое возрастание амплитуды колебаний. Вспомните пример с передвижением группы солдат по мосту. Если частота шагов солдат, идущих в ногу, будет близка к собственной частоте моста, то амплитуда колебаний моста вследствие резонанса может возрасти и вызвать разрушение конструкции. Поэтому при движении по мосту солдаты не должны идти в ногу!

Рассмотрим аналитически явление резонанса в линейном контуре с потерями, изображенном на рис. 16.

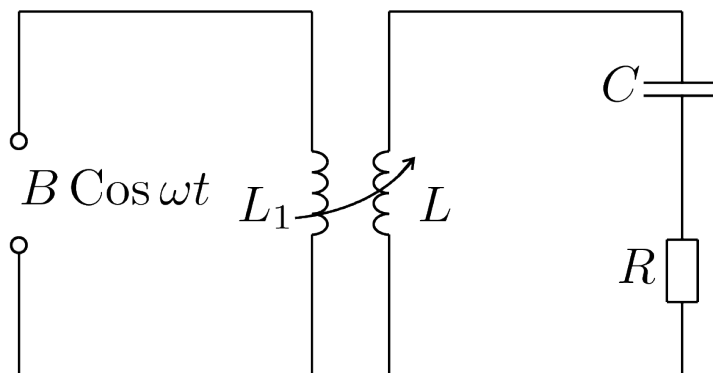


Рис. 16. Линейный контур с потерями под действием внешней силы

Вначале запишем уравнения контура в отсутствие внешней силы ($B = 0$). На основании уравнений Кирхгофа сумма па-

дений напряжений на элементах контура должна равняться нулю, так как контур не содержит источника напряжения:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0. \quad (25)$$

Учитывая, что $i = \frac{dq}{dt}$, из (25) получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (26)$$

Введя обозначения $\frac{R}{L} = \alpha$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ и $q = x$, получим

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (27)$$

С учетом гармонического воздействия уравнение (27) принимает вид:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t. \quad (28)$$

Уравнение (28) описывает колебательный контур с потерями, находящийся под воздействием гармонической силы. Нас интересует, как будет изменяться амплитуда колебаний при изменении частоты воздействия ω . Для этого нужно найти решение уравнения (28) $x(t)$. Используя формулы тригонометрии, представим внешнюю силу $B \cos \omega t$ в виде:

$$B \cos \omega t = \frac{B}{2} (\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)), \quad (29)$$

где $\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t$.

Будем искать решение уравнения (28) в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2} (a_0 \exp(j\omega t) + a_0^* \exp(-j\omega t)). \quad (30)$$

В (30) $a_0 = A_0 \exp(j\varphi)$ – комплексная амплитуда, $A_0 = |a_0|$ – действительная амплитуда, a_0^* – сопряженная a_0 комплексная величина $a_0^* = A_0 \exp(-j\varphi)$, φ – фаза колебаний.

Если подставить в исходное уравнение (28) решение в виде (30), то после несложных преобразований получим:

$$j\omega\alpha a_0 - a_0\omega^2 + a_0\omega_0^2 = B, \quad (31)$$

откуда для комплексной амплитуды a_0 следует:

$$a_0 = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (32)$$

Подставив в (32) $a_0 = A_0 \exp(j\varphi)$ и разделяя действительные и мнимые части, получаем:

$$A_0 = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (33)$$

Если в (33) положить $\alpha = 0$, то есть рассмотреть колебательный контур без потерь, то мы получим, что при $\omega \rightarrow \omega_0$ амплитуда будет стремиться в бесконечность (рис. 17:

$$A_0 = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (34)$$

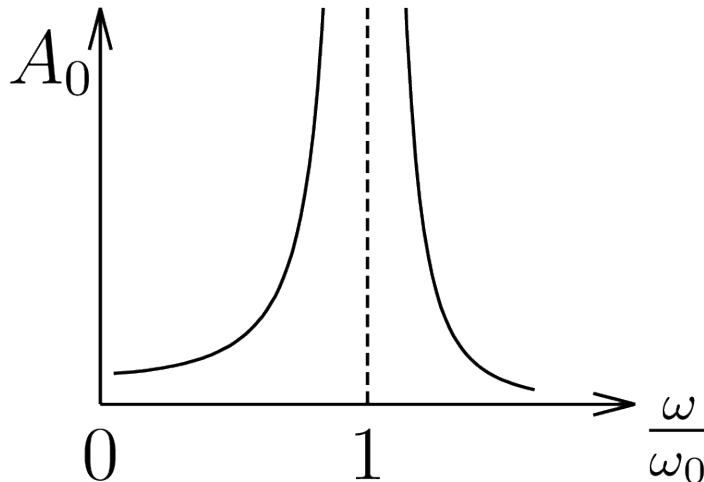


Рис. 17. Резонанс в колебательном контуре без потерь

С учетом потерь из (33) следует два важных результата. Во-первых, амплитуда A_0 в резонансе не возрастает до бесконечности и при $\omega \simeq \omega_0$ будет иметь максимальное значение тем меньше, чем больше параметр потерь α . Во-вторых, с ростом параметра α резонансная частота будет сдвигаться в сторону меньших значений $\omega < \omega_0$. В этом можно убедиться, если вычислить зависимость максимальной амплитуды A_{\max} от величины параметра α . Для этого нужно решить уравнение

$$\frac{dA_0}{d\omega} = 0, \quad (35)$$

используя уравнение для A_0 (33). Равенство нулю производной (35) достигается только при условии, что $A_0 = A_{\max}$. Решая (35), получаем

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2}}. \quad (36)$$

Если $\alpha \ll 1$, то из (36) следует, что резонансная частота будет близка к ω_0 . Резонансные свойства для зависимостей $A_0(\omega)$ при различных значениях α приведены на рис. 18, из которого видим, что с ростом параметра потерь α резонансная частота ω_p смещается влево от ω_0 .

1.9 Резонанс в нелинейном контуре

Как мы уже рассматривали в разделе 1.2, нелинейная система характеризуется зависимостью параметров системы от переменной состояния. В уравнении (27) для линейного контура мы имеем в качестве параметров $\alpha = R/L$ и $\omega_0^2 = 1/LC$. С точки зрения схемы контура (рис. 16) физическими пара-

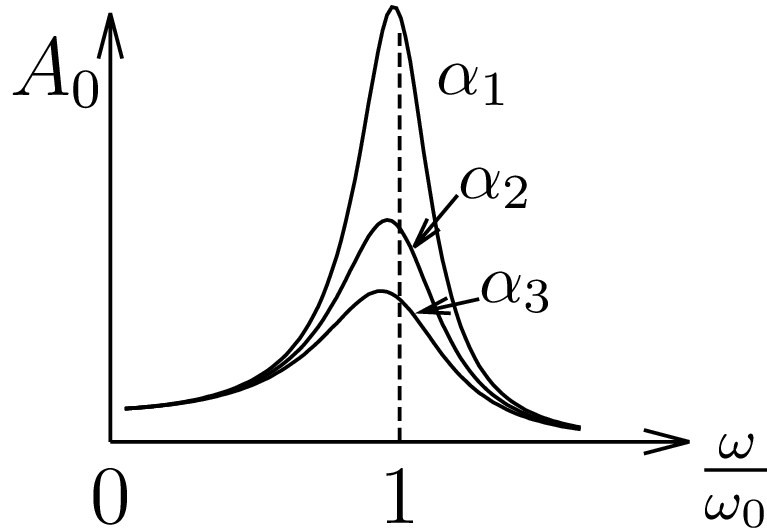


Рис. 18. Резонансные кривые $A_0(\omega)$ для различных значений параметра потерь α . $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

метрами контура являются R , L и C , которые для линейного контура есть постоянные величины. В радиофизике (в теории колебаний, в теоретических основах радиофизики) простейшей моделью нелинейного контура служит уравнение:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0. \quad (37)$$

В сравнении с (27) в (37) добавлено нелинейное слагаемое γx^3 . Каков физический смысл этого нелинейного члена в уравнении (37)? Для ответа на вопрос рассмотрим сумму двух последних слагаемых в (37) $\omega_0^2 x + \gamma x^3$ и проведем преобразования следующим образом:

$$\omega_0^2 x + \gamma x^3 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0^2} x^2\right) x = \frac{1}{LC(x)} x,$$

где $C(x) = \frac{C}{1 + lx^2}$, $l = \gamma LC$. (38)

Из (38) следует, что уравнение (37) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2(x)x = 0, \quad \omega_0^2(x) = \frac{1}{LC(x)},$$

$$C(x) = \frac{C}{1 + lx^2}, \quad l = \gamma LC. \quad (39)$$

Другими словами, уравнения нелинейного маятника мы получаем в случае, когда емкость контура будет зависеть от переменной состояния x по нелинейному закону:

$$C(x) = \frac{C}{1 + lx^2}. \quad (40)$$

Итак, необходимо решить уравнение:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = B \cos \omega t. \quad (41)$$

В отличие от уравнения (28), уравнение (41) является нелинейным. Его строгое аналитическое решение практически невозможно получить. Если учесть некоторые особые условия, основанные на физике явления, то можно использовать приближенные методы решения (41). Но и эти методы требуют некоторой специальной подготовки, которую студенты получают лишь на 2–3 курсах обучения. Поэтому мы ограничимся описанием результатов без проведения аналитических выкладок. На рис. 19 представлены резонансные кривые для нелинейного контура (41), построенные при различных значениях амплитуды B и фиксированном α .

Как видно из рис. 19,а, резонансные кривые с ростом амплитуды воздействия приобретают характерную форму (рис. 19,б), типичную для резонанса в нелинейном контуре. Резонансные кривые как бы изгибаются вправо, что связано с тем, что $\gamma > 0$. Если $\gamma < 0$, то наблюдается изгиб влево. Но при этом реализуется новое явление, которое называют *гистерезисом*. Если стартовать с точки a (рис. 19,б), то с увеличением частоты воздействия ω амплитуда A будет

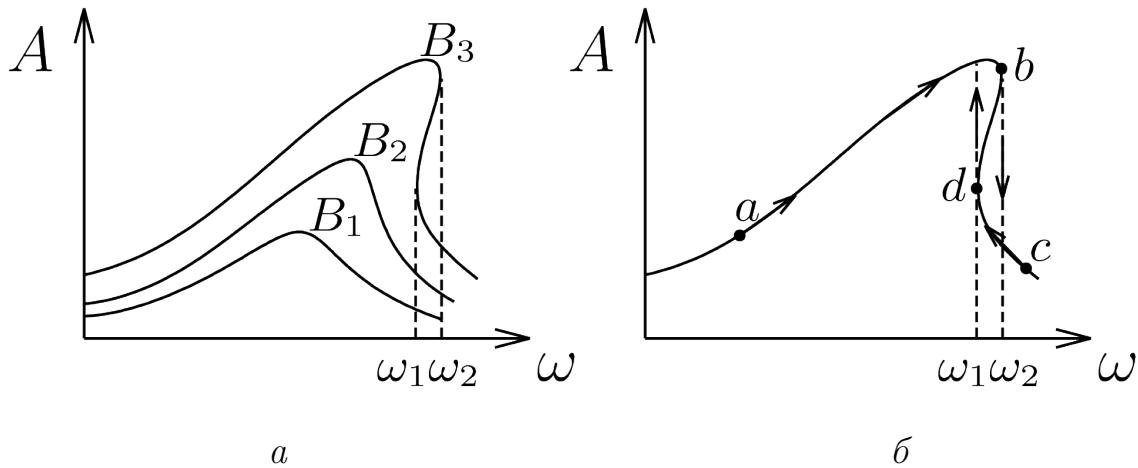


Рис. 19. Резонасные кривые $A_0(\omega)$ для нелинейного контура (41)

монотонно расти, пока мы не достигнем точки b ($\omega = \omega_2$). Далее амплитуда скачком уменьшится и мы попадем в точку c . Если теперь уменьшать частоту $\omega_1 < \omega < \omega_2$, то мы плавно перейдем в точку d , как показано стрелкой на рис. 19,б. Дальнейшее уменьшение частоты $\omega < \omega_1$ приведет к резкому скачку амплитуды вверх и далее она будет монотонно уменьшаться. Эффект гистерезиса состоит в том, что амплитуда колебаний в контуре при возрастании и уменьшении частоты изменяется принципиально различным образом. Область частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ называется областью гистерезиса.

Выше мы предположили, что нелинейным элементом контура является емкость $C(x)$ (40). Аналогичные результаты будут и в случае, если нелинейными свойствами будет обладать индуктивность $L(x)$, а емкость останется постоянной.

1.10 Параметрический резонанс

Явление параметрического резонанса имеет место в колебательных системах при периодическом изменении ее пара-

метров. При этом параметры, которые подвергаются модуляции, должны быть связаны с энергией системы. Вначале поясним эффект параметрического резонанса на простом примере катаний на качелях. Из практики хорошо известно, что для поддержания конечной амплитуды колебаний на качелях, необходимо изменять положение тела (или центра тяжести, задающего эффективную длину маятника). Производить эти изменения нужно с учетом “фазы” колебаний качелей. Когда амплитуда колебаний качелей близка к минимальной (качели в нижней точке), необходимо изменить положение тела (или центра тяжести, задающего эффективную длину маятника). С этой целью нужно немного привстать на лавке качелей, которая находится вблизи нижней точки. Когда амплитуда колебаний качелей близка к максимальной, нужно присесть на лавке. В результате таких приседаний эффективная длина маятника будет изменяться во времени. Нетрудно понять, что за один период колебаний качелей приседания будут совершаться с частотой, которая в два раза больше собственной частоты колебаний качелей. Таки образом, модуляции длины маятника в этом примере осуществляется с частотой “накачки” $\omega_H = 2\omega_0$. При выполнении этих условий амплитуда колебаний качелей вначале возрастает, а затем стабилизируется на некотором уровне. Почему это происходит? Важными являются два момента. Первый, который ответственен за возрастание амплитуды, связан с подкачкой энергии в систему. Каждый раз, когда вы приподнимаете центр тяжести (уменьшаете длину маятника) в нижней точке, вы совершаете работу против силы тяжести. Тем самым вы увеличиваете потенциальную энергию системы. Когда вы приседаете в верхней

точке, работа будет много меньше, так как направление приседания практически совпадает с направлением силы тяжести. Таким образом, за период колебаний качелей вы увеличиваете энергию. За счет этого амплитуда колебаний качелей нарастает. Второй момент, почему амплитуда стабилизируется? Это обусловлено тем, что в режиме установившихся колебаний за счет нелинейности энергия, вносимая вами в систему за счет модуляции длины качелей, оказывается равной энергии потерь за счет силы трения.

Приведенный пример с качелями можно достаточно просто воспроизвести на рабочем столе, если изготовить маятник, изображенный на рис. 20.

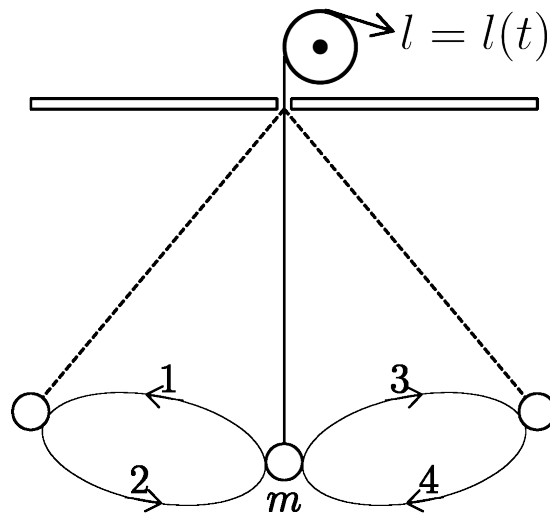


Рис. 20. Маятник, длина которого меняется периодически с периодом, в два раза меньшим периода колебаний маятника с постоянной длиной

Для осуществления режима параметрического резонанса нужно обеспечить изменение длины маятника по закону $l = l_0 f(t)$, где $f(t) \equiv f(t + T_0/2)$. Например, можно обеспечить достижение параметрического резонанса, положив $f(t) =$

$l_0(1 + \sin 2\omega_0 t)$. Это означает, что нужно изменять длину периодически с частотой $2\omega_0$. В процессе параметрического резонанса масса m будет двигаться по траектории типа цифры 8, последовательно проходя участки 1, 2, 3 и 4.

Из школьного курса физики известны уравнения, описывающие движение качелей:

$$\ddot{x} + g \sin \frac{x}{l} = 0, \quad (42)$$

где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Уравнения (42) является нелинейным. Но если амплитуда колебаний $x/l \ll 1$, т.е. является малой, то $\sin x/l \simeq x/l$ и из (42) получаем:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (43)$$

Из анализа примера с качелями следует, что для поддержания колебаний маятника необходимо периодически с частотой $2\omega_0$ менять длину маятника. В общем виде уравнение (43) должно быть записано в форме:

$$\ddot{x} + [\omega_0(t)]^2 x = 0, \quad (44)$$

где $\omega_0^2(t) = g/l(t)$, $l(t)$ – периодически изменяемая во времени длина маятника.

Уравнение (43) описывает классический линейный осциллятор без потерь, который может соответствовать колебательной системе самой различной природы. В частности, как хорошо известно, уравнение (43) описывает и колебания в LC -контуре без потерь с частотой $\omega_0^2 = 1/LC$.

Тогда для реализации параметрического резонанса в колебательном контуре запишем уравнение (44) для изменения заряда q в виде:

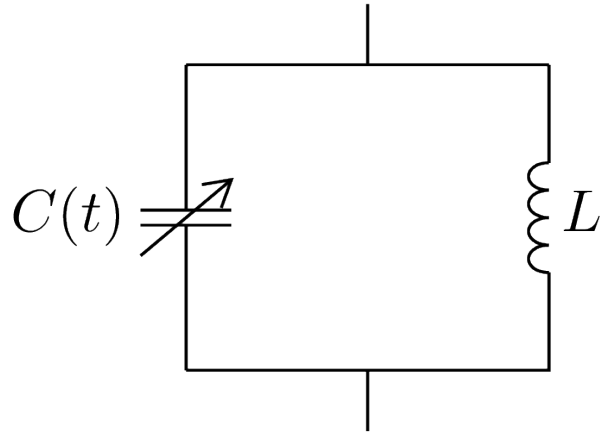


Рис. 21. LC -контур с изменяющейся во времени емкостью $C(t)$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC(t)}q = 0, \quad (45)$$

где вместо модуляции длины маятника $l(t)$ мы используем модуляцию емкости контура $C = C(t)$ (см. рис. 21).

Рассмотрим более детально динамику системы (45). При постоянном значении емкости C заряд на обкладках конденсатора будет изменяться по гармоническому закону $q(t) = q_0 \sin \omega_0 t$, где $\omega_0 = 1/LC$ – собственная частота контура. График $q(t)$ представлен на рис. 22,а.

Что будет происходить в контуре, если мы будем изменять емкость во времени, то есть $C = C(t)$? Известна связь напряжения U на конденсаторе с величиной емкости C и заряда q :

$$U = \frac{q}{C}, \quad (46)$$

а также выражение для энергии, запасаемой заряженным конденсатором

$$W = C \frac{U^2}{2}. \quad (47)$$

Будем изменять емкость конденсатора путем резкого раздвигания и сближения пластин конденсатора, учитывая, что

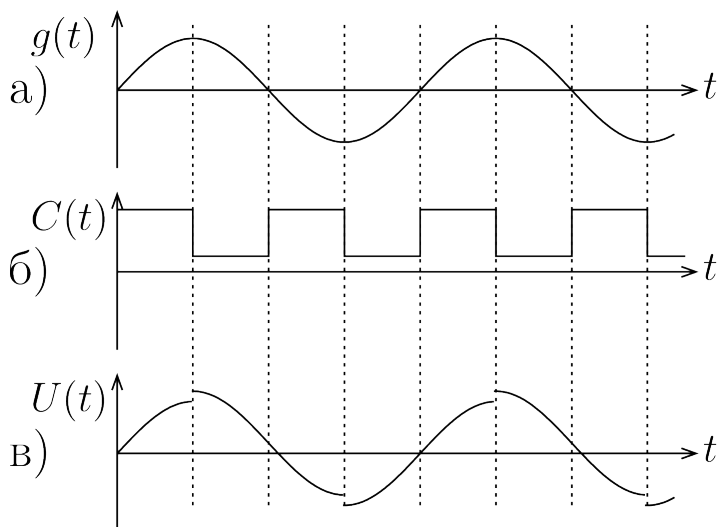


Рис. 22. Изменение заряда на обкладках конденсатора C в контуре при $C = \text{const}$ (а), изменение емкости во времени с периодом $T_{\text{H}} = T_0/2$ (б), изменение напряжения $U(t)$ на конденсаторе в режиме параметрического резонанса (в)

$C \sim 1/l$, где l – расстояние между пластинами конденсатора. С увеличением l емкость будет уменьшаться и с уменьшением l – увеличиваться. Пусть при $l = l_1$ емкость будет C_1 , а при $l = l_2 > l_1$ емкость C_2 будет меньше $C_1 < C_2$. Закон изменения емкости показан на рис. 22,б. Как следует из данного рисунка, в момент $q = q_{\text{max}}$ мы резко увеличиваем расстояние l (уменьшаем C_1 до величины C_2). Затем, дождавшись момента, когда заряд на конденсаторе будет отсутствовать ($q = 0$, см. рис. 22,а), мы уменьшим l до исходной величины и емкость примет значение C_1 . Изменения емкости будем производить с частотой $\omega_{\text{H}} = 2\omega_0$, как видно из рис. 22,а,б. Ступенчатое (или импульсное) изменение емкости приведет к характерным скачкам напряжения, которое подчиняется формуле (46). Как видно из рис. 22,в, в итоге напряжение по амплитуде будет расти со временем. В силу линейности исходного

уравнения (45), это нарастание будет до бесконечности. Это нарастание будет ограничено только в случае, когда контур будет нелинейным.

Рассмотрим, за счет чего происходит нарастание амплитуды колебаний заряда (напряжения) в контуре. Обратимся к рис. 22. В момент, когда заряд на обкладках конденсатора достигает максимального значения, мы резко раздвигаем пластины, уменьшая при этом емкость с C_1 до C_2 . При этом мы совершаем работу против сил притяжения положительных (на одной пластине конденсатора) и отрицательных (на другой) зарядов. Этим мы увеличиваем напряжение U на конденсаторе (47). Как видно из рис. 22, обкладки конденсатора мы сдвигаем в исходное положение в момент, когда заряд $q(t) = 0$. В этом случае работа не совершается, а емкость C_2 вновь принимает значение C_1 . Таким образом, изменяя емкость $C(t)$ с частотой $\omega_H = 2\omega_0$, мы дважды за период колебаний “подкачиваем” энергию в систему, равную $W = C_1 U_1^2 - C_2 U_2^2$. Поэтому частота ω_H называется частотой накачки в режиме параметрического резонанса. Аналитические исследования свидетельствуют о том, что параметрический резонанс достигается и в случае, если частота накачки $\omega_H = \frac{2}{n}\omega_0$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Частота накачки должна быть кратна ω_0 , но ω_H должна быть при этом меньше, чем $2\omega_0$.

Эффект параметрического резонанса был использован отечественными учеными Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси для создания параметрических генераторов электромагнитных колебаний в 1929–1931 гг. С этой целью они использовали колебательный контур, емкость или индуктивность которого механическим способом изменялась с удвоенной по

сравнению с резонансной частотой. Такие устройства не обладают свойством самовозбуждающейся автоколебательной системы и в этом смысле их лучше называть не генераторами, а преобразователями частоты. Параметрические системы не являются автономными в том смысле, что они работают при внешнем независимом возбуждении. Генератором в настоящее время называют автономные автоколебательные системы, способные генерировать незатухающие колебания в отсутствие внешних возбуждений.

1.11 Радиоп физика в нашей жизни

Радиоп физика в виде созданных на ее основе различных устройств и разработанных в ее рамках радиоп физических методов прочно вошла в жизнь каждого человека и общества в целом. Рассмотрим в качестве первого примера предметы бытовой техники, имеющиеся практически в любой квартире, в которой мы живем. В каждой современной квартире имеются телефоны. Это и стационарный телефонный аппарат, подключенный к городской телефонной сети, беспроводной телефонный аппарат, позволяющий носить его с собой в пределах квартиры, и, наконец, мобильный телефон как индивидуальное средство связи. Далее, мы имеем различные звуковоспроизводящие устройства: радиоприемники, проигрыватели CD-дисков, магнитофоны. Неотъемлемой частью современного жилья стали телевизоры, видеомагнитофоны, а также видеокамеры. На любой кухне, как правило, есть СВЧ-печь, используемая для разогрева и приготовления пищи. Наконец, в современной квартире сегодня обязательно есть персональ-

ный компьютер, планшет и различные типы электронных игр для детей. Все вышеперечисленные приборы создавались на основе радиофизических законов с использованием достижений электрорадиотехники, радиоэлектроники, полупроводниковой электроники и других наук, объединенных в рамках радиофизики.

Рассмотрим использование высокотехнологичных приборов и устройств, которые прочно вошли в оснащение медицинских учреждений и успешно используются для решения проблем ранней диагностики и лечения заболеваний человека. Всем хорошо знакомы рентгеновские аппараты и аппараты флюорографии. Рентгеновское излучение (электромагнитные колебания очень высокой частоты) при прохождении через части тела человека частично поглощается. Степень поглощения определяется химическим составом и плотностью тканей организма. В результате на пленке проявляется черно-белая структура внутренних органов и частей тела человека, которую “читает” врач-рентгенолог и делает соответствующие выводы. Отметим, что рентгеновские установки встречаются не только в медицине. Их используют в аэропортах для проверки пассажиров и багажа, при строительстве трубопроводов для оценки качества сварки и во многих других областях.

Дальнейшее совершенствование рентгеновского метода диагностики привело к созданию рентгеновской томографии, которая дает возможность послойного анализа органов человеческого тела. Это достигается путем синхронного перемещения источника рентгеновского излучения и кассеты с рентгеновской пленкой относительно неподвижного пациента.

В результате модификации метода рентгеновской томографии был создан компьютерный томограф. При компьютерной томографии используются рентгеновские снимки, полученные при различных углах направления излучения, которые затем обрабатываются компьютером и представляются в виде объемного трехмерного изображения. Создание и использование рентгеновских и компьютерных томографов оказало революционное влияние в плане решения проблем ранней диагностики целого ряда смертельно опасных заболеваний. Признанием важности разработки теории и практической реализации компьютерного томографа было присуждение Нобелевской премии американскому физику А. Кормаку и английскому инженеру Г. Хаунсфилду в 1979 году.

Другим примером применения радиофизических методов в медицине являются аппараты для ультразвуковых исследований (УЗИ-диагностика). Принцип работы УЗИ-приборов состоит в следующем. Генератор ультразвуковых волн, частотой от 2 до 25 МГц, работая в импульсном режиме с частотой импульсов $\simeq 1$ кГц, облучает выбранный орган человека (почку, печень или другой орган). Специальный датчик, включающий пьезоэлементы, регистрирует уровень отраженных звуковых сигналов, что позволяет получать информацию об исследуемом органе. УЗИ – это то же самое, что радиолокатор, только его работа осуществляется не в СВЧ диапазоне, а в ультразвуковом диапазоне частот.

Нельзя не отметить еще один пример использования радиофизики в медицине: это лучевая или радиотерапия. Лучевая терапия подразумевает лечение злокачественных новообразований путем их облучения сверхвысокочастотными и доста-

точно мощными электромагнитными волнами. В результате облучения раковые клетки теряют способность к размножению и организм от них избавляется. С точки зрения радиофизики лучевая терапия требует решения двух принципиальных задач: создание источника СВЧ-излучения и фокусировка излучения в локализованные области тела человека.

Обсудим применение радиофизики на транспорте. Современные транспортные средства, от обычного автомобиля до самолета и океанского лайнера, оснащены (помимо средств связи) навигатором системы ГЛОНАСС или GPS. Эти приборы позволяют с высокой точностью определять координаты транспортных средств на поверхности земли как в процессе движения, так и при остановках. GPS-навигатор через спутники подключается к сложной компьютерной системе обработки информации, которая решает задачу определения координат транспортного средства. Далее, все самолеты, морские и речные суда, железнодорожные локомотивы и некоторые специальные автомобили оснащаются радиолокаторами. Радиолокатор обеспечивает безопасность движения в плохих погодных условиях и позволяет ориентироваться капитанам воздушных и морских судов днем и ночью, в тумане, в облаках на достаточно больших расстояниях. Каждый аэропорт имеет свои радиолокационные станции, которые позволяют диспетчерам иметь полную информацию об обстановке в небе в окрестности аэропорта и контролировать взлеты и посадки самолетов независимо от метеоусловий. Отметим, что любое конкретное транспортное средство сегодня имеет достаточно сложное радиоэлектронное оборудование, которое обеспечивает его безопасную работоспособность. Электрони-

ка позволяет контролировать исправность различных систем, управляет их характеристиками и предупреждает возможности нарушения режимов их работы. Как правило, “мозгом” всей электронной системы транспортного средства является специальный компьютер, программное обеспечение которого решает все необходимые задачи и позволяет принимать оптимальные решения в различных ситуациях.

Особо важная роль радиолокационных систем наблюдения состоит в обеспечении безопасности границ государства. В стране создана сеть мощных радиолокационных станций, которые “следят” за обстановкой в районах границы всей страны и в случае опасности дают возможность предотвратить ее путем подключения всех необходимых средств защиты.

Отметим важную роль радиофизики в решении задач обороноспособности нашей страны как на суше, так на море. На основе радиофизики решаются проблемы надежной и защищенной связи, задачи обнаружения целей, проблемы сверхточного наведения на цель снарядов, ракет, самолетов и т.д. Последние годы все возрастающая роль отводится использованию космических аппаратов и развитию соответствующих средств космической радиосвязи. В освоении космоса роль радиофизики и радиофизических методов является во многом определяющей.

Практическое применение радиофизических методов и их совершенствование привело к рождению новых научных направлений и самостоятельных наук. Примером может служить лазерная физика, квантовая радиофизика, лазерная биомедицинская физика, радиоспектроскопия, радиоастрономия, геофизическая разведка месторождений полезных иско-

паемых и др. Этот перечень можно продолжать и продолжать. Но и приведенных примеров должно быть достаточно, чтобы получить представление о роли радиофизики в нашей жизни. Для молодых людей, принявших решение стать специалистом по направлению “радиофизика”, открываются безграничные возможности приложения полученных знаний, выбрав в качестве профессии любое из перечисленных направлений. Свои силы и знания можно приложить в трех основных направлениях. Во-первых, это теоретические исследования в области радиофизики, направленные на изучение новых закономерностей и эффектов, которые могут быть использованы на практике. Во-вторых, имея склонность к инженерной деятельности, можно посвятить себя проблеме конструирования и совершенствования сложных радиофизических систем в оборонной промышленности, в медицине и других сферах деятельности. Наконец, в-третьих, можно посвятить себя работе по техническому обслуживанию сложных электронных и радиоустройств в технике, медицине и естествознании, добиваясь наибольшей эффективности и раскрытию возможностей современной радиоэлектронной техники.

Часть 2. Нелинейная динамика

В первой части настоящей книги достаточное внимание было уделено понятию нелинейности процессов в окружающем нас мире. Наука, в том числе и радиофизика, призваны отражать закономерности природных и технологических явлений. И не в последнюю очередь это касается изучения нелинейных процессов, с которыми нам приходится иметь дело. Принципиально важная роль нелинейности была понятна ученому сообществу уже давно. Однако продвижение по пути познания нелинейных явлений и процессов сдерживалось большими трудностями, связанными с теоретическим анализом. Этот анализ требовал решения принципиально нелинейных математических задач, а теория не располагала общими методами их решения. Более того, математика оказалась неспособной предложить общую теорию решения нелинейных уравнений. В связи с этим теоретическое исследование нелинейных процессов долгие годы базировалось на разработанных приближенных аналитических методах, которые давали возможность анализа лишь слабо нелинейных систем. И в середине 20-го столетия произошло в полном смысле этого слова революционное изменение, обусловленное появлением компьютера. Этот уникальный вычислительный инструмент позволил решать любые принципиально нелинейные уравнения! Да, это не аналитическое решение проблемы, а эксперимен-

тальное. Но, учитывая, что компьютерное решение получается со сколь угодно высокой степенью точности, это решение во многом может заменить решение аналитическое.

Благодаря возможностям, связанным с внедрением в нелинейную науку компьютеров, возникло новое научное направление, называемое сегодня нелинейной динамикой. Безусловно, что задачей нелинейной динамики является не только получение численных (компьютерных) решений. Нелинейная динамика включает также проведение реальных экспериментов по изучению нелинейных процессов в физике, радиофизике, химии, биологии и других науках. В рамках настоящей книги мы сосредоточим наше внимание в основном на получении и анализе решений нелинейных уравнений с помощью компьютеров с использованием необходимых математических результатов.

В общем плане нелинейная динамика включается в круг задач, решаемых в рамках математического моделирования процессов в сложных системах. Математическое моделирование прочно вошло сегодня во многие направления науки и техники. Для ясности рассмотрим один показательный пример – создание самолета. Совсем еще недавно разработка любых как гражданских, так и военных самолетов шло по пути создания большого числа экспериментальных образцов. Каждый экспериментальный образец самолета проходил испытания с целью выявления недостатков конструкции с последующим внесением изменений. Таких образцов как правило создавалось достаточно много. Это было, во-первых, опасно для летчиков-испытателей и, во-вторых, достаточно дорого. Сегодня конструкция самолета практически полностью разра-

батывается с использованием моделирования на компьютере. В итоге создается единственный опытный образец самолета и после его испытаний и небольшой доработки он поступает в серийное производство. Таким образом, оберегается жизнь летчиков, удешевляется и ускоряется сам процесс разработки и выхода в серию новой конструкции самолета. И таких примеров из различных областей техники можно привести очень много.

Итак, предметом изучения в рамках нелинейной динамики является анализ нелинейных явлений и систем, которые описываются нелинейными уравнениями. В рамках настоящей книги мы будем изучать динамику так называемых “детерминированных” систем. Детерминированные системы описываются дифференциальными уравнениями, которые не содержат источников шума. Хорошо известно, что такие уравнения имеют решение, оно единственное и зависит от начальных условий. Если начальные условия заданы, то решение этих уравнений характеризует однозначно изменение состояния исследуемой системы во времени. В этом смысле детерминизм означает полную определенность и полную предсказуемость. Детерминированный подход является альтернативой стохастическому описанию, которое оперирует не точными данными о состоянии системы, а вероятностными характеристиками. Ниже мы рассмотрим некоторые фундаментальные вопросы, входящие в круг проблем, изучаемых в рамках нелинейной динамики. Основное внимание будет уделено анализу свойств динамических систем. Основателями детерминированной теории динамических систем по праву явля-

ются великие ученые: французский математик А. Пуанкаре и русский математик А.М. Ляпунов.



Жюль Анри Пуанкаре,
французский математик
(1854–1912)



Александр Михайлович Ляпунов,
русский математик
(1857–1918)

В начале 20-го века большой вклад в развитие теории динамических систем внесли А.А. Андронов и его ученики. Отметим также, что нелинейная динамика является неотъемлемой частью относительно нового, объединяющего широкий круг наук, научного направления, введенного немецким физиком Г. Хакеном и названного им “синергетика”.

2.1 Динамические системы

Динамическая система и ее математическая модель

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объ-



Герман Хакен, немецкий физик

екта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, позволяющего по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. В рамках детерминированного подхода эта задача решается однозначно, то есть конкретно заданному начальному состоянию соответствует единственное состояние в любой будущий момент времени.

Проблема предсказания эволюции объекта в естествознании представляет собой, безусловно, математическую задачу. Математическая логика требует от нас четкой формулировки предмета и задачи исследования. С этой целью необходимо сформулировать определение изучаемого объекта и указать его свойства. Предметом нашего анализа будут не системы и

объекты вообще, а так называемые “динамические системы” в математическом понимании этого термина.

Под *динамической системой* (ДС) понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин или функций в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, и его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описание динамических систем в смысле задания закона эволюции также допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены динамические переменные (*координаты*) системы, определяющие однозначно ее *состояние*, и указан *закон эволюции* состояния во времени (оператор эволюции).

Очень важным является понимание того, что в зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследуя одну и ту же динамическую систему (к при-

меру, физический маятник), в зависимости от степени учета различных факторов (трение, амплитуда колебаний) мы получим отличающиеся математические модели. Исследование реальных систем идет по пути изучения соответствующих математических моделей, совершенствование и развитие которых определяется анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель.

Будем рассматривать в качестве основных динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений или отображениями. Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально введенные в механике. Для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин x_1, x_2, \dots, x_N в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_i и x'_i отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

Если рассматривать величины x_1, x_2, \dots, x_N как декартовы координаты точки \mathbf{x} в N -мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки. Последнюю называют изображающей, а чаще – *фазовой точкой*, а пространсто со-

стояний – *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой *фазовой траекторией*. В фазовом пространстве системы уравнениями (48) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке \mathbf{x} выходящий из нее вектор скорости $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, компоненты которого даются правыми частями уравнений (48):

$$[f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)] . \quad (49)$$

Динамическая система (48) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (50)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – вектор-функция размерности N .

Движение фазовой точки в фазовом пространстве качественно отражает рис. 23.

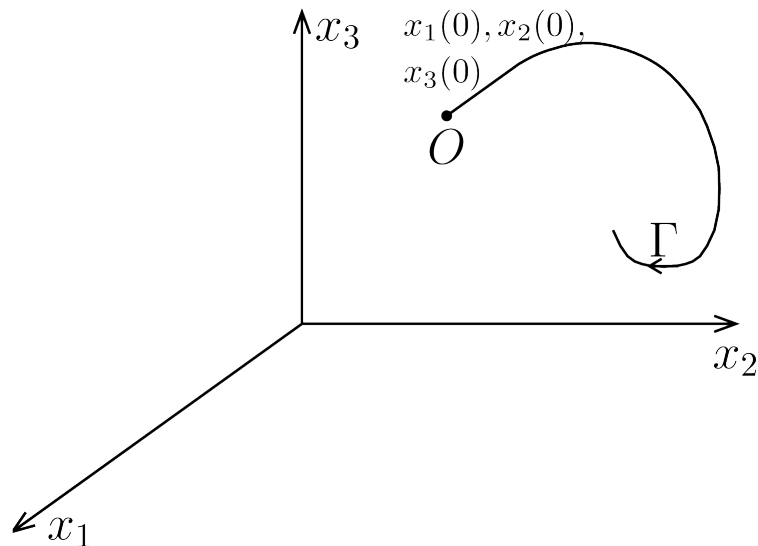


Рис. 23. Фазовая траектория Γ в трехмерном пространстве, стартующая из точки начального состояния $\mathbf{x}(0)$ ($x_1(0), x_2(0), x_3(0)$)

Помимо динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями (48), (50), широко используются динамические системы с дискретным временем. Системы с дискретным временем (каскады) играют важную роль в нелинейной динамике. Их называют также *точечными отображениями* или *отображениями последования*¹. Отображение последования может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(n + 1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n)), \quad (51)$$

где $\mathbf{x} \in R^N$ – вектор состояния, n – номер итерации (дискретное время), $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ – некоторая вектор-функция, называемая *функцией последования*. Функция последования в явном виде задает оператор эволюции на одном шаге по времени (за одну итерацию): $T_n^1 \mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n))$. Зная вектор состояния \mathbf{x} в некоторый момент времени n , мы можем найти состояние системы в любой другой момент времени $m = n + k$, $k > 0$:

$$\mathbf{x}(n + k) = T_n^k \mathbf{x} = \mathbf{P}^{(k)}(\mathbf{x}(n)) = \mathbf{P}(\mathbf{P}(\dots \mathbf{P}(\mathbf{x}(n)) \dots)).$$

Таким образом, выражение (51) задает динамическую систему.

Обратимые отображения последования могут быть непосредственно связаны с потоковыми системами, задаваемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для того чтобы от потоковой системы перейти к отображению с дискретным временем, нужно ввести секущую поверхность S (в многомерном случае – гиперповерхность), так, чтобы все фазовые траектории пересекались с ней строго трансверсально. Если рассматривать точки пересечения траекторий с

¹ Часто используемый термин “дискретное отображение” не совсем удачен, поскольку отображение задается, как правило, на непрерывном множестве состояний, а дискретным является только множество моментов времени.

поверхностью S при движении в одном направлении, то поток порождает в S отображение последования, называемое также *отображением Пуанкаре* (рис. 24). Отображение Пуанкаре обязательно обратимо и однозначно (но не взаимно-однозначно) связано с исходным потоком. Порядковый номер пересечения заданной траектории с секущей поверхностью есть дискретное время n .

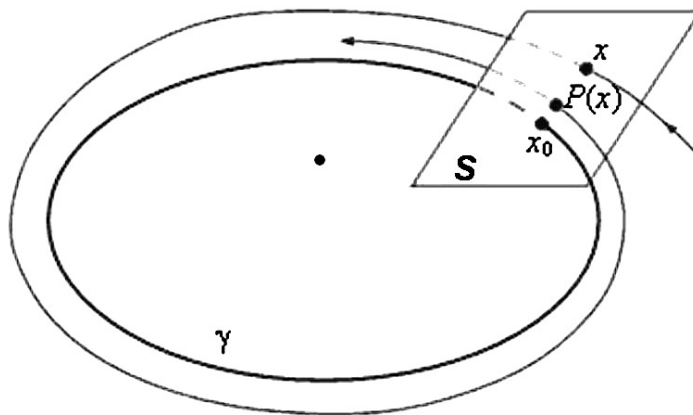


Рис. 24. Построение отображения Пуанкаре секущей поверхности S

Колебательные системы и их свойства

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают *линейные* и *нелинейные* колебательные системы, *сосредоточенные* и *распределенные*, *консервативные* и *диссипативные*, *автономные* и *неавтономные*. Особый класс представляют так называемые *автоколебательные системы*. Основные свойства указанных систем подробно обсуждаются в работах по теории колебаний.

Колебательная система называется *линейной* или *нелинейной* в зависимости от того, линейна или нелинейна описыва-

ющая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправдана.

Колебательные системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными* или *точечными* системами. Они характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться как сосредоточенная либо как распределенная. Математические модели *распределенных* систем – это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния. В теории электрических колебаний систему рассматривают как сосредоточенную в тех случаях, когда длина волны колебаний существенно превышает геометрические размеры самой системы. Если размеры прибора соизмеримы с длиной волны генерируемых колебаний, то систему необходимо рассматривать как распределенную.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные* системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют *гамильтоновыми*. Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются соответственно *неконсервативными*. Си-

системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными*. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Колебательные системы называются *автономными*, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Если система находится под воздействием внешних сил, то она является *неавтономной*. В этом случае оператор эволюции явно зависит от времени.

Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс так называемых *автоколебательных* систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

Фазовые портреты типовых колебательных систем

Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования геометрии фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом и

А.А. Андроновым и с тех пор стал привычным инструментом при исследовании самых различных колебательных явлений.

Обсудим несколько простых, но типичных примеров представления динамических процессов в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC -контура (рис. 25,а), предположив амплитуду колебаний достаточно малой. Выбрав в качестве переменной заряд q на конденсаторе, с помощью уравнений Кирхгофа получим

$$\ddot{q} + (LC)^{-1}q = 0. \quad (52)$$

Домножив (52) на $L\dot{q}$, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0, \quad (53)$$

т.е. для любого момента времени выполняются равенства

$$E = E_L + E_C = const, \quad E_L = L\dot{q}^2/2, \quad E_C = q^2/2C, \quad (54)$$

отражающие постоянство во времени полной энергии осциллятора (суммы магнитной E_L и электрической E_C энергий). В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом, введя замену времени $\tau = t/\sqrt{LC}$:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = const. \quad (55)$$

Для фазовых координат $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$, запишем уравнения в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1; \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \quad (56)$$

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть *особая точка* типа *центр*.

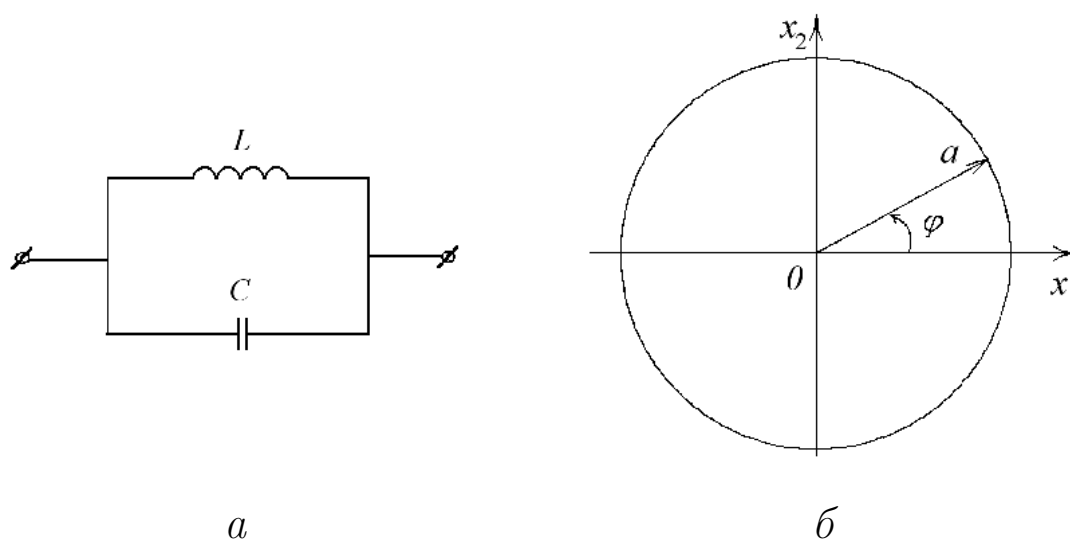


Рис. 25. Консервативный осциллятор: a – колебательный контур, моделируемый уравнением (55); b – фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии

Факт сохранения энергии (54) в системе, дает возможность описать ее с помощью уравнения 1-го порядка. Действительно, определив новую переменную φ соотношениями

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = -a \sin \varphi, \quad (57)$$

получим уравнения

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0, \quad (58)$$

которые и представляют закон движения фазовой точки. Во времени эволюционирует одна переменная φ , и фазовое пространство консервативного осциллятора с заданной энергией

одномерно. Гармоническим колебаниям осциллятора отвечает равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса a , как это показано на рис. 25,б.

Линейный осциллятор с затуханием. Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь, оказывает принципиальное влияние на характер движения системы. Наиболее простые закономерности проявляются в системах с полной диссипацией энергии, когда силы трения действуют по всем степеням свободы, а поступление энергии извне отсутствует. Рассмотрим процессы в линейном диссипативном осцилляторе, когда сила трения пропорциональна скорости изменения координаты. Примером такой системы служит колебательный контур, содержащий активное сопротивление R . Уравнение контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0 \quad (59)$$

заменой переменных сводится к безразмерной форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{L/C}, \quad \tau = t/\sqrt{LC}. \quad (60)$$

При $\delta = 0$ имеем консервативный линейный осциллятор, рассмотренный выше. Введение малого трения качественно меняет фазовый портрет системы. Для $0 < \delta < 1$ решением уравнения (60) является

$$x = A \exp(-\delta\tau) \cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \quad (61)$$

где A и ψ – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. На фазовой плоскости для любых начальных данных имеют место скручивающиеся спирали, по которым фазовые точки асимптотически приближаются к началу координат, характеризуя затухающий колебательный про-

цесс. Нуль координат является особой точкой системы, которая в случае $\delta < 1$ есть *устойчивый фокус* (рис. 26,а). Если коэффициент трения $\delta > 1$, процесс в системе аperiodический:

$$x = A_1 \exp(\lambda_1 \tau) + A_2 \exp(\lambda_2 \tau), \quad \lambda_{1,2} = [-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2}] / 2, \quad (62)$$

и фазовые траектории выглядят в виде семейства характерных кривых, по которым, как и в предыдущем случае, изображающие точки стремятся к нулю координат (рис. 26,б). Особая точка в указанных условиях является *устойчивым узлом*.

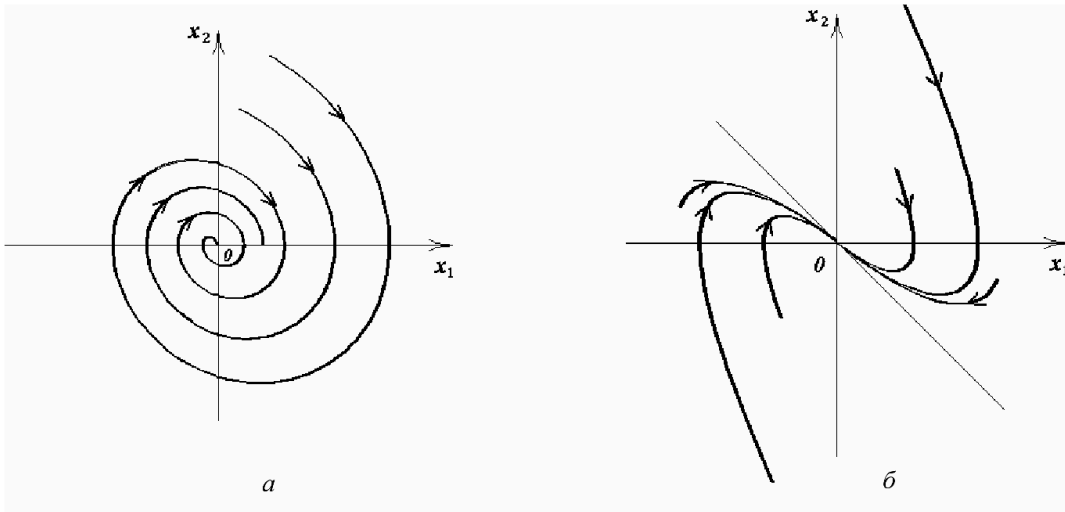


Рис. 26. Фазовый портрет диссипативного осциллятора (60) с параметром: а — $\delta < 1$; б — $\delta > 1$

Итак, при любых значениях физических параметров системы, когда $\delta > 0$, диссипативный маятник характеризуется единственным глобально устойчивым состоянием равновесия в нуле фазовых координат. Независимо от выбора начальных условий наблюдается затухающее колебательное или аperiodическое движение. При $t \rightarrow \infty$ любая (!) изображающая

точка стремится к началу координат в устойчивый фокус либо узел.

Описанное свойство является общим для динамических систем с полной диссипацией энергии. Положения равновесия типа устойчивого фокуса или узла являются здесь *глобально притягивающими* в том смысле, что фазовые траектории из любой точки фазового пространства асимптотически к ним стремятся. Стационарные незатухающие колебания в линейных диссипативных системах оказываются невозможными. С физической точки зрения это понятно – нет условий поддержания колебаний. Энергия, расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется.

Автоколебательные системы

Возможность существования в автономной системе периодического асимптотически устойчивого движения, которое изображается изолированной замкнутой траекторией в фазовом пространстве, к которой со временем притягиваются траектории из некоторой окрестности независимо от начальных условий, обеспечивается только в нелинейных диссипативных системах. Этот тип динамических систем настолько важен при изучении колебательных процессов, что для его выделения А.А. Андронов предложил специальный термин – автоколебательные системы. Математическим образом автоколебаний служит *предельный цикл Пуанкаре* – замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая устойчивому периодическому движению.

В качестве примера динамической системы с предельным циклом Пуанкаре рассмотрим классический нелинейный ос-

циллятор ван дер Поля, уравнение колебаний которого

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (63)$$

Параметр ε , характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется *параметром возбуждения*. Из сравнения уравнений (63) и (60) следует, что осциллятор ван дер Поля описывает более сложный колебательный контур, характер и значение диссипации в котором зависят от переменной x . В фазовых координатах уравнение колебаний осциллятора (63) представляется как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (\varepsilon - x_1^2)(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \quad (64)$$

причем

$$(\varepsilon - x_1^2)(1 - bx_1^2) \neq 0. \quad (65)$$

Аналитически уравнения (64) строго не решаются и исследования проводятся с использованием численных методов. В практически важном случае ($\varepsilon > 0$) уравнения (64) имеют единственное устойчивое решение в виде *предельного цикла* Γ , изображенного на рис. 27,а.

Положение равновесия в начале координат, в котором вблизи нуля можно пренебречь нелинейностью, является неустойчивым фокусом. Траектории из окрестности состояния равновесия асимптотически стремятся к предельному циклу. Как показывает анализ, предельный цикл является устойчивой изолированной структурой, притягивающей к себе траектории из любой точки на фазовой плоскости.

Таким образом, в динамических системах с нелинейной зависимостью диссипации энергии от переменной, совершающей колебания, впервые появляется принципиально новый

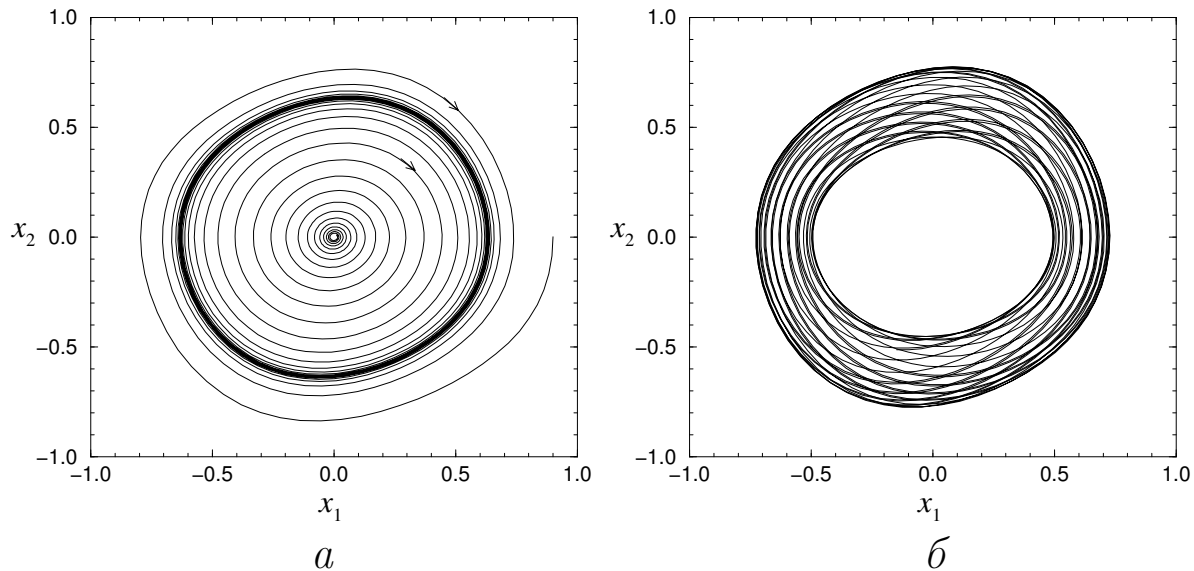


Рис. 27. Предельные множества осциллятора ван дер Поля (63): *a* – предельный цикл Γ , рассчитанный для значения параметра $\varepsilon = 0.1$; *б* – проекция двумерного тора на плоскость переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$; численное интегрирование уравнения (66) для значений параметров $\varepsilon = 0.1$, $B = 0.1$, $p = 1.35$, $\varphi_0 = 0$

тип притягивающего множества фазовых траекторий: предельный цикл. Расчеты свидетельствуют, что на предельном цикле за время периода колебаний доли рассеиваемой и вносимой энергии строго компенсируются.

Отметим, что впервые понятие предельного цикла было введено в теорию динамических систем А. Пуанкаре и по совету Л.О. Мандельштама было использовано А.А. Андроным для описания устойчивых автоколебаний в генераторе ван дер Поля.

Наконец, рассмотрим еще один случай типичной структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей, например, при периодическом возмущении системы с устойчивым предельным циклом. Добавим в уравнение (63) источник гармонического действия сравнительно малой амплитуды B и частоты p , которую считаем рационально не

связанной с частотой периодических колебаний автономного осциллятора:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)(1 - bx^2)\dot{x} + x = B \sin(p\tau + \varphi_0). \quad (66)$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой p вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерной поверхности, представляющей собой *поверхность тора*. Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи!). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить *двумерный тор*, равна трем. На рис. 27,б показана проекция на плоскость переменных x_1, x_2 фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (66).

Регулярные и странные аттракторы динамических систем

Рассмотренные выше примеры иллюстрируют предельные множества траекторий в фазовом пространстве: состояния равновесия, периодические движения и квазипериодические движения. Указанным предельным множествам отвечают три различных типа решений уравнений.

Движения диссипативных систем целесообразно разделить на два класса: *переходных, нестационарных* движений, отвечающих процессу релаксации от начального к предельному множеству состояний, и класс *установившихся, стационарных* движений, фазовые траектории которых целиком

принадлежат предельным множествам. Важными с физической точки зрения являются *притягивающие предельные множества* – аттракторы. С течением времени произвольное начальное состояние из некоторой области притяжения G , включающей в себя аттрактор G_0 , релаксирует к G_0 . Движение, которому отвечает фазовая траектория в области притяжения, есть переходной процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий инвариантному предельному множеству, т.е. аттрактору G_0 .

К чему может привести повышение размерности системы, например, до $N = 3$, т.е. выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство? Совсем еще недавно, до начала 60-х годов, с увеличением размерности фазового пространства диссипативных систем связывали возможность появления (в дополнение к указанным выше) лишь квазипериодических аттракторов, соответствующих движениям на p -мерных торах.

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве размерности $N \geq 3$ соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной нигде не пересекающейся линии. При $t \rightarrow \infty$ траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов.

Именно с существованием таких траекторий связывают возможность хаотического поведения детерминированных ди-

намических систем с размерностью фазового пространства $N \geq 3$.

Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 г. обнаружил Э. Лоренц при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции. Спустя восемь лет в теоретической работе Д. Рюэля и Ф. Такенса притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующаяся режимом установившихся непериодических колебаний, была названа *странным аттрактором*. Этот термин был сразу воспринят исследователями и утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем.

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или l -мерных торов называют *простыми* или *регулярными*, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Со *странным* аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательно-го режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах.

Однако термин “случайный” имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом экспериментах. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется стро-

гая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных “шумоподобных” автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа *динамическая стохастичность*, *детерминированный хаос* и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

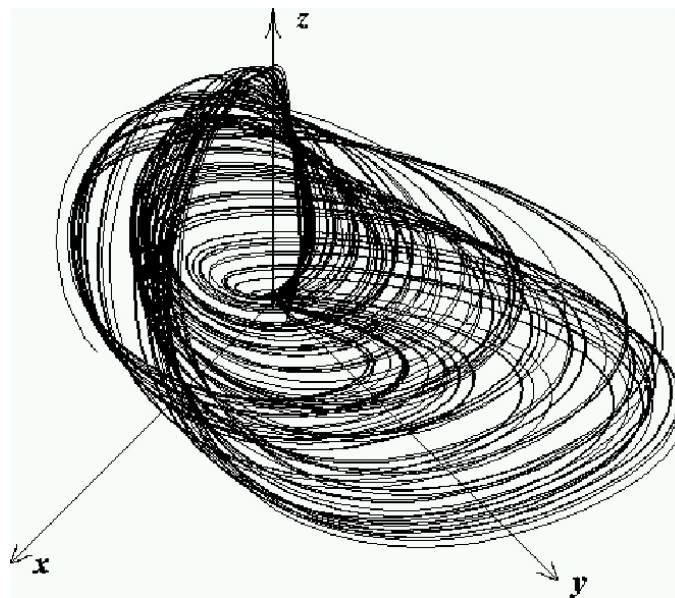


Рис. 28. Странный аттрактор в модели генератора Анищенко–Астахова (67)

Примером системы с хаотическим аттрактором являются уравнения генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко-Астахова, 1981). Эта система является обоб-

щением уравнений ван дер Поля на случай трехмерного пространства:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (67)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Результаты численного решения уравнения (67) для значений параметров $m = 1.5$, $g = 0.2$ приведены на рис. 28, который также иллюстрирует хаотический аттрактор.

В настоящем разделе мы дали общее определение динамической системы и детально ознакомились с динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Мы установили, что такие динамические системы могут иметь четыре типа решений: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. Этим типам решений соответствуют аттракторы системы в виде устойчивого равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора (p -мерного тора) и хаотического или странного аттрактора. Важным является то, что простейшие типы квазипериодических и хаотических аттракторов могут реализовываться в динамических системах с размерностью фазового пространства не менее трех.

2.2 Устойчивость, бифуркации и катастрофы

Наши представления об устойчивости того или иного режима функционирования динамической системы интуитивно формируются в процессе познания природы и жизни. Первые

шаги маленького ребенка дают ему вполне реальные представления об устойчивости при ходьбе, хотя они (представления) еще неосознанны. Глядя на знаменитую картину П. Пикассо “Девочка на шаре” (см. рис. 29), мы как бы на себе ощущаем, что положение равновесия девочки неустойчиво. Взрослея, мы уже можем рассуждать об устойчивости корабля в бушующем море, об устойчивости экономики по отношению к действиям управленцев, об устойчивости нашей нервной системы к стрессорным возмущениям и т.д. В каждом конкретном случае речь идет об отличающихся свойствах, специфических для рассматриваемых систем. Однако, если внимательно вдуматься, то можно найти нечто общее, присущее любой системе. Это общее заключается в том, что когда мы говорим об устойчивости, то понимаем при этом характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени – система неустойчива. В противном случае, малые возмущения затухают со временем – система устойчива.

Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Устойчивость таких систем как автомобиль, воздушный или морской лайнеры по отношению к возмущениям, которые всегда сопровождают их движение, безусловно жизненноважный фактор в самом прямом смысле этого слова.

Еще более важной проблемой является анализ устойчивости сложных, многокомпонентных систем. Наблюдая за эволюцией живой и неживой природы, мы можем подметить од-

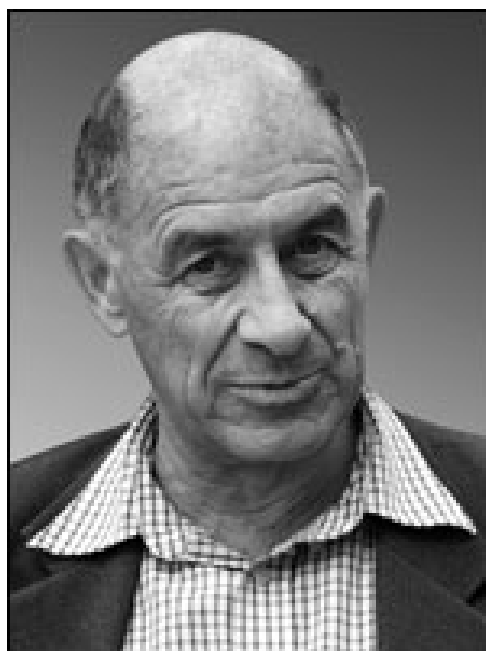


Рис. 29. Картина П. Пикассо “Девочка на шаре”

но интересное свойство: развитие той или иной сложной системы всегда сопровождается потерей устойчивости одними режимами ее функционирования и рождением новых, устойчивых. Одни формации (или структуры) гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. Формирование новых структур всегда сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением!) предшествующих. И здесь скрыта важная проблема: проблема перехода системы из одного режима функционирования в другой, отличающийся принципиально, режим. Предшествующий режим потерял устойчивость, но что при этом может произойти? Система

выбирает новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем.

Приведенные рассуждения являются качественными и приобретают вполне определенный смысл лишь в том случае, когда нам удастся перевести их на формальный язык математики. Основы строгой математической теории устойчивости были заложены в трудах крупного русского математика А.М. Ляпунова около 100 лет назад; развитие качественной теории и теории бифуркаций динамических систем связано с именами российских ученых А.А. Андронова, В.И. Арнольда и их учеников.



Владимир Игоревич Арнольд,
советский и российский математик
(1937–2010)

Попытаемся на простых и понятных примерах проиллюстрировать содержание и методы решения задач об устойчивости и бифуркациях динамических систем.

Линейный анализ устойчивости

Любая динамическая система (физическая, химическая, механическая и т.д.) ассоциируется в нашем представлении с эволюцией во времени. Предвидя возражения, укажем, что и состояние равновесия, т.е. стационарное состояние, при котором скорость изучаемого процесса равна нулю, также можно трактовать как предельный случай эволюции системы во времени. В естествознании типичной моделью динамической системы, как мы уже говорили, является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = F(x, \mu), \quad (68)$$

где $x(t)$ – переменная состояния, F – некоторая функция состояния, характеризующая закон эволюции, μ – параметр системы. Если задано начальное состояние $x(t_0)$, то существует единственное решение уравнения (68), которое предсказывает будущее состояние $x(t)$ для любых $t > t_0$. Если число переменных состояния равно двум (или более), то моделью будет система двух (или более) уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \mu). \end{aligned} \quad (69)$$

Число параметров также может быть больше, чем один.

В связи с тем, что проблема устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, на первом этапе она может быть исследована в рамках линейного приближения. Поясним это. Пусть $x^0(t)$ есть некоторое частное решение уравнения (68). Устойчивость этого решения (состояния) мы хотим исследовать. Введем в рассмот-

рение переменную $y(t)$, которая задает малое отклонение от частного решения:

$$y(t) = x(t) - x^0(t), \quad (70)$$

(здесь $x(t)$ – возмущенное решение).

Наша задача состоит в исследовании эволюции во времени малого возмущения $y(t)$, которая подчиняется уравнению (68). Разложим функцию F в степенной ряд в окрестности частного решения $x^0(t)$:

$$F(y) = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^0(t)} y(t) + \frac{d^2 F}{dx^2} \Big|_{x=x^0(t)} y^2(t) + \dots \quad (71)$$

Производные функции F должны вычисляться в точках, соответствующих частному решению.

Перепишем уравнение (68) для возмущения $y(t)$ с учетом (71):

$$\dot{y}(t) = F(y, \mu) = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^0(t)} y(t) + \Phi(y), \quad (72)$$

где

$$\Phi(y) = \frac{d^2 F}{dx^2} \Big|_{x=x^0(t)} y^2(t) + \dots \quad (73)$$

Слагаемые $\Phi(y)$ включают все члены с y^n ($n \geq 2$), т.е. учитывают нелинейные добавки. По определению переменная $y(t)$ есть малое отклонение от частного решения. Поэтому нелинейными членами в уравнении (72) в первом приближении можно пренебречь.

Таким образом, для эволюции малого возмущения мы получаем линейное уравнение:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad \text{где } A(t) = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^0(t)}. \quad (74)$$

Рассмотрим пример. Пусть динамическая система задана уравнением:

$$\dot{x} = a - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (75)$$

Найдем стационарные состояния этой системы и исследуем их устойчивость. В стационарном состоянии изменений во времени нет, значит $\dot{x} = 0$ и мы получаем:

$$x_{1,2}^0 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (76)$$

Рассмотрим уравнение для возмущений (74) применительно к первому стационарному состоянию x_1^0 .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -(2bx_1^0)y = (-2\sqrt{ab})y = \lambda y, \\ \lambda &= \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_1^0} = -2\sqrt{ab}. \end{aligned} \quad (77)$$

Решением уравнения (78) будет $y = \exp(\lambda t)$. Возмущение y экспоненциально затухает во времени (λ есть отрицательное число). Это означает, что состояние x_1^0 устойчиво! Так как второе состояние x_2^0 отличается от первого только знаком, то решение уравнения (78) в этом случае будет экспоненциально нарастающим во времени. Стационарное состояние x_2^0 неустойчиво!

Достаточно простая идея предсказания устойчивости по линейному приближению оказалась весьма плодотворной. Используя математический формализм, можно обобщить результат (74) на случай двух и более переменных состояния. Например, в случае $N = 2$ уравнение (74) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad (78)$$

где $a_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=x_i^0}$, $i, j = 1, 2$.

Если одномерное уравнение (68) описывает эволюцию исключительно в окрестности стационарных состояний, то уравнение (70) может иметь в качестве решения не только стационарные, но и периодические решения. С увеличением размерности исходной системы (68) в общем случае усложняются и типы возможных решений. Это создает определенные проблемы в исследовании устойчивости: ведь для решения уравнений для возмущений типа (74) необходимо знать частное решение $x_0(t)$! С применением современных компьютеров эти трудности легко преодолимы.

Бифуркации динамических систем

Если внимательно присмотреться к окружающей нас природе, то можно, в частности, сделать следующее интересное наблюдение. Жизнь на планете Земля возможна лишь благодаря тепловому излучению Солнца, которое служит источником энергии. Летом эта энергия в северном полушарии больше, чем зимой. И картина летней природы при этом заметно отличается от зимней. Давайте рассмотрим в качестве примера объем воды в озере. Количественной мерой привносимой солнечной энергии является температура воды (точнее, энергия пропорциональна температуре). Летом вода в озере теплая и можно купаться. С наступлением осени температура воды постепенно уменьшается. Купаться уже не хочется, однако вода и при более низкой, но плюсовой температуре, остается водой! Глубокой осенью верхний слой воды в озере остывает до нулевой температуры и вдруг превращается в лед! Далее и при -20°C лед остается льдом. Что же произошло? При прохождении температуры через нуль вода резко

изменила свои свойства: она из жидкого состояния перешла в твердое. И не плавно, а скачком.

Если рассматривать температуру воды как некий параметр системы, то хорошо известно, что с изменением параметра вода резко меняет свои свойства при переходе через 0°C , через 100°C , когда вода превращается в пар. Есть и другие особые значения температуры воды. Оказывается, что большинство интересных физических задач при их математическом описании приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим в качестве примера уравнения колебаний обыкновенного маятника или (что с математической точки зрения полностью идентично) параллельного RLC -контура:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (79)$$

Уравнение (79) содержит два параметра: α – параметр затухания, характеризующий трение, и ω_0 – параметр, определяющий частоту колебаний. Если потери энергии отсутствуют, параметр затухания $\alpha = 0$, то решением уравнения (79) будут гармонические незатухающие колебания. При малом трении $0 < \alpha < 1$ движение системы будет колебательным с амплитудой, которая уменьшается во времени по экспоненциальному закону. Наконец, при достаточно большом трении ($\alpha > 1$) движение маятника будет аperiодическим, затухающим во времени. Уже в этом простом примере выделяются два особых значения параметра $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, отклонения от которых качественно меняют свойства системы (см. раздел 2.1).

Изменение параметра в уравнении может вызвать потерю устойчивости одного состояния (или режима функциониро-

вания) системы и переход ее в другое, отличное от первого состояние. Это явление называется *бифуркацией* (от слова раздвоение), а значение параметра, при котором оно происходит, – *точкой бифуркации*. Состояние системы ниже точки бифуркации и выше ее при изменении параметра меняется. Ясно, что вода при температуре $+3^{\circ}\text{C}$ и $+22^{\circ}\text{C}$ это разные состояния. Но при этом вода остается водой! В математике и физике существует понятие грубости или структурной устойчивости. Суть этого понятия в том, что при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. С этой точки зрения для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния.

Давайте вернемся к нашему примеру с устойчивостью стационарных состояний в системе (75). Мы условились, что в уравнении (75) параметры a и b положительны. Устойчивость определяется знаком производной правой части уравнения (75) в стационарной точке, т.е. знаком величины λ (78). При положительных значениях параметров a и b эта производная всегда отлична от нуля. А что если мы будем уменьшать значение параметра a ? Как видно из (78) при $a = 0$ (независимо от величины $b > 0$) величина λ обращается в нуль, возмущение y не нарастает и не затухает! Мало того, при $a = 0$ в системе 2 состояния равновесия как бы сливаются в одно ($x = 0$)! Далее, если, $a < 0$, то состояний равновесия нет

вовсе! Действительно, в этом случае $x_{1,2}^0 = \pm j\sqrt{\frac{|a|}{b}}$, т.е. становятся чисто мнимыми.

Приведем теперь результаты математического анализа этой бифуркации, которая известна как бифуркация “двукратное равновесие”. Вновь рассмотрим уравнение (75). Пусть $x^0(a)$ есть грубое состояние равновесия, т.е. $\lambda(a) \neq 0$. Это означает, что при малой вариации параметра a равновесие $x^0(a)$ продолжает существовать как устойчивое или неустойчивое.

При некотором значении параметра $a = a^*$ собственное число $\lambda(a^*)$ в положении равновесия может обратиться в нуль:

$$\lambda(a) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^0} = 0, \quad a = a^*. \quad (80)$$

Для реализации бифуркации “двукратное равновесие” необходимо, чтобы вторая производная была отлична от нуля

$$\left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x^0} \neq 0. \quad (81)$$

Для выполнения условий (80) и (81) в общем случае необходимо, чтобы исходное уравнение в правой части включало как минимум квадратичное нелинейное слагаемое, как в нашем примере (75).

Если условия (80) и (81) выполнены, то x^0 есть двукратный корень исходного уравнения (75). Значение параметра a^* , при котором выполняется условие (80), является точкой бифуркации. До точки бифуркации $a > a^*$ мы имеем 2 состояния равновесия. В точке бифуркации $a = a^*$ они сливаются в одно, далее при $a < a^*$ состояний равновесия в системе не будет! В нашем случае (75) $a^* = 0$.

Результаты можно представить графически (см. рис. 30).

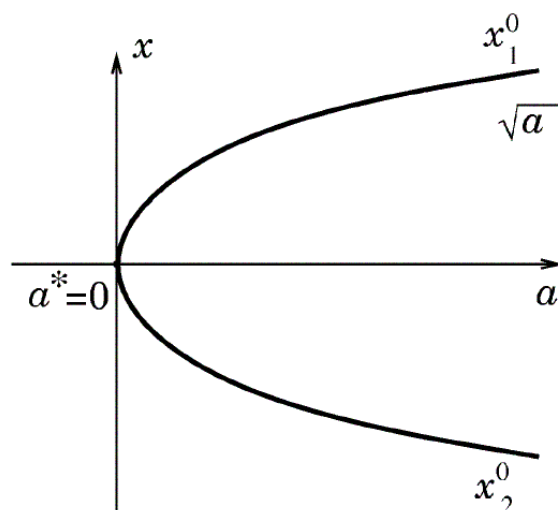
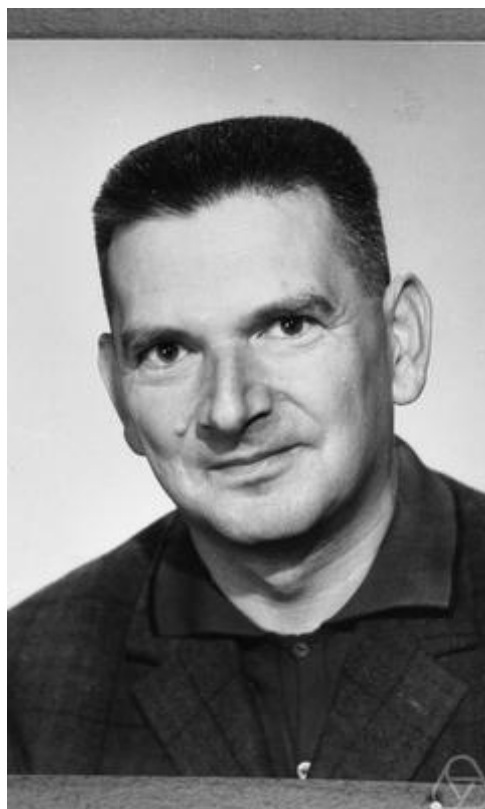


Рис. 30. Бифуркация “двукратное равновесие”. При $a > 0$ в системе (75) два стационарных состояния x_1^0 и x_2^0 , при $a = a^* = 0$ они сливаются в одно и при $a < 0$ стационарные состояния исчезают

“Мягкие” и “жесткие” бифуркации. Катастрофы

Несмотря на многолетнюю историю существования и развития классической теории устойчивости и бифуркаций, наступил момент (как это часто бывает), когда к этой теории было вдруг привлечено всеобщее внимание. Причиной тому послужили популярно изложенные версии работ французского математика Рене Тома по так называемой теории катастроф. Теория катастроф в начале семидесятых годов стала модной, понятной (как им казалось!) для неспециалистов и универсальностью своих претензий стала напоминать псевдонаучные теории прошлых времен. В чем же суть дела? Появление теории катастроф Р. Тома специалистами было воспринято нормально. Ряд результатов этой теории заслуживает самого глубокого уважения. Но “философского” открытия здесь нет. Поясним почему.



Рене Том, французский
математик (1923–2002)

Суть дела заключается в том, что речь идет все о тех же бифуркациях, но при этом выбирается один из типов – так называемые *жесткие бифуркации*. Для пояснения рассмотрим два простых примера. В первом случае (см. рис. 31) в результате бифуркации исходное стационарное состояние теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния (рис. 31,в) расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость (помечено звездочкой). Бифуркации такого типа называют *мягкими*, имея в виду то, что вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из

режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.

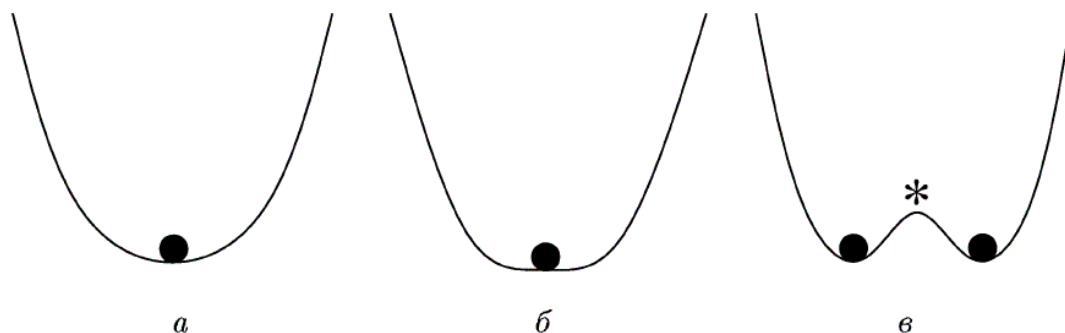


Рис. 31. Пример мягкой бифуркации. Стационарное состояние (*a*) теряет устойчивость (*б*) и вблизи него появляются два новых устойчивых стационарных состояния (*в*)

Другой пример бифуркации качественно представлен на рис. 32. При $\mu < \mu^*$ (рис. 32,а) шарик находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (помечено звездочкой). При $\mu > \mu^*$ (рис. 32,б) шарик находится в неустойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, устойчивое состояние. При $\mu = \mu^*$ (рис. 32,в) шарик находится в неустойчивом стационарном состоянии, которое сливается с устойчивым состоянием, образуя новое устойчивое состояние.

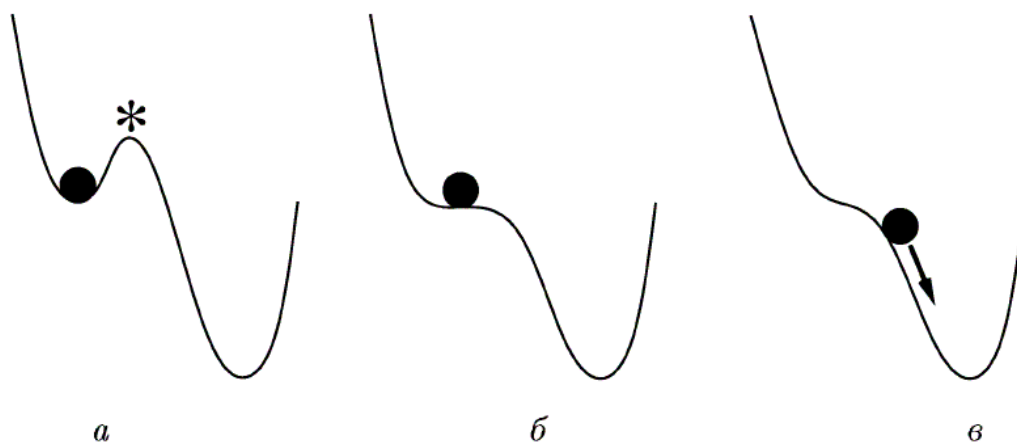


Рис. 32. Жесткая потеря устойчивости стационарным состоянием, катастрофа. Качественная иллюстрация бифуркации “двукратное равновесие” (рис. 30)

В точке бифуркации $\mu = \mu^*$ устойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно (рис. 32,б). Далее они исчезают и система выбирает новый режим (например, как это показано на рис. 32,в, который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют *жестким* и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф.

Рассмотренный выше пример бифуркации “двукратное равновесие” в системе (75) представляет собой типичный пример жесткой бифуркации, который качественно проиллюстрирован на рис. 32.

В результате безусловно упрощенного, качественного описания проблемы устойчивости и бифуркаций динамических систем можно тем не менее сделать определенные выводы. Эволюция любых систем сопровождается потерей устойчивости одними режимами функционирования и бифуркационными переходами их в новые. Эти “фазовые переходы” могут осуществляться плавно, мягко, а могут происходить скачкообразно, в виде катастроф. Строгий математический анализ устойчивости и бифуркаций позволяет сегодня практически рассматривать широкий спектр проблем, связанных с исследованиями бифуркационных переходов в различных динамических системах. Но при этом необходимо опираться на строгие математические результаты и использовать обоснованные методы теоретического и качественного анализа.

2.3 Динамический хаос

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания, являющаяся предметом пристального внимания исследователей. Убедительно доказано, что в таких системах причина генерирования сложных колебательных процессов, которые могут не отличаться по физическим характеристикам от истинно случайных, кроется не в большом числе степеней свободы и не в наличии флуктуаций, как ранее полагалось, а в экспоненциальной неустойчивости режимов, порождающей чувствительную зависимость от точности задания начального состояния системы. Возможность подобных явлений прекрасно понимал и предвидел А. Пуанкаре. В неустойчивых системах “...совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть. ... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное”. Так писал он еще в 1908 г. в книге “Наука и метод”. Развитие идей А. Пуанкаре в настоящее время привело к созданию фундамента хаотической динамики детерминированных систем. Как оказалось, необходимым условием возникновения хаоса в дифференциальных системах является размерность фазового пространства $N \geq 3$ и возбуждение незатухающих хаотических пульсаций становится принципиально возможным в генераторах всего с полутора степенями свободы.

В системах с одной степенью свободы, фазовым пространством которых служит двумерная плоскость, возможные ди-

намические режимы исчерпываются состояниями равновесия и периодическими колебаниями (предельными циклами). Это обстоятельство многие годы служило психологическим барьером, преодолению которого не помогали даже очевидные (сейчас!) экспериментальные результаты. Ограниченность “нелинейного мышления” на базе фазовой плоскости понимали многие ведущие ученые, однако ввиду отсутствия соответствующего математического аппарата обоснованный выход с плоскости в пространство трех и более измерений был практически невозможен.

Детерминированность

Что же представляет собой явление детермированного хаоса? Попробуем ответить на этот вопрос. Вначале необходимо внести ясность в понимание терминов “детермированность” и “хаос”, а затем определить содержание термина “детермированный хаос”. Во всех случаях, когда говорят о детермированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия. В применении к эволюционным законам это означает, что если задано некоторое начальное состояние системы при $t = t_0$, то оно *однозначно* определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$. Например, если тело движется равноускоренно, то его скорость определяется детермированным законом:

$$v(t) = v(t_0) + at. \quad (82)$$

При задании начальной скорости $v(t_0)$ мы однозначно определяем значение скорости $v(t)$ в любой момент времени $t > t_0$.

В общем случае, зависимость будущего состояния $x(t)$ от начального $x(t_0)$ можно записать в виде: $x(t) = F[x(t_0)]$, где

F – детерминированный закон (или оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$. Этот закон может представлять собой функцию, дифференциальное или интегральное уравнение, просто некоторое правило, заданное таблицей или графиком и т.д. Важно главное: закон F *однозначно* трансформирует начальное состояние (причину) в будущее состояние (следствие).

Хаос

Теперь внесем ясность в понятие “*хаос*”. Давайте проведем мысленный эксперимент с броуновской частицей. Поместим частицу в начальный момент $t = t_0$ в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы Δt . Нетрудно убедиться, что под действием случайных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможностей воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты? Их, главным образом, два. Первый – каждый раз траектория движения частицы будет сложной, непериодической. Второй – любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными условиями мы будем получать различные траектории движения частицы, которые даже близко не напоминают друг друга!

Классическое явление движения броуновской частицы дает нам четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе. Таким образом, если мы говорим о хаосе, мы подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить).

Приведенные выше размышления приводят нас к убеждению, что понятия “детерминизм” и “хаос” есть прямопротивоположные по смыслу. Детерминизм ассоциируется с полной однозначной предсказуемостью и воспроизводимостью, хаос — с полной непредсказуемостью и невоспроизводимостью. Возникает закономерный вопрос, что понимается под термином “детерминированный хаос”, где объединены два противоположных по смыслу понятия? Ответить на этот вопрос не просто, но возможно. Попытаемся это сделать.

Устойчивость и неустойчивость

Нам понадобится рассмотреть понятие *устойчивости* (*неустойчивости*) движения системы. Начнем с простейшего, рассмотрев состояние покоя или равновесия системы. Поместим маленький шарик в нижнюю точку внутри полой сферы. Слегка толкнем его и пронаблюдаем за движением. После совершения нескольких затухающих колебаний шарик вновь займет положение на дне сферы. В этом случае положение равновесия *устойчиво*: малые возмущения исходного состояния затухают во времени. Если мы поместим шарик на вершину сферы (снаружи), то реакция на малое возмущение будет иной: при любом сколь угодно малом отклонении шарика

от состояния равновесия он скатывается с вершины. Это положение равновесия *неустойчиво*: малые возмущения исходного состояния нарастают во времени.

Физический смысл понятия устойчивость (неустойчивость), рассмотренный нами применительно к состоянию равновесия, сохраняется и в отношении любого другого режима. Режим функционирования динамической системы называют *устойчивым*, если малые возмущения в окрестности этого режима затухают во времени, стремясь к нулю. Если этого не происходит и малые отклонения от режима функционирования системы нарастают во времени, такой режим будет *неустойчивым*.

Нелинейность

Теперь обсудим другое важное свойство сложных систем – *нелинейность*. Пусть мы имеем дело с неустойчивым режимом. Слегка нарушив режим малым воздействием, мы поначалу будем фиксировать нарастание возмущения. Будет ли оно бесконечным? В реальной жизни – никогда! Отклонение будет нарастать до тех пор, пока не вступит в действие некий механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения. Что это такое? Ответим на этот вопрос с физической и математической точек зрения.

С физической точки зрения нарастание амплитуды не может происходить до бесконечности. На первом этапе, когда отклонение от исходного состояния мало, оно может нарастать. А дальше? Дальше, в силу ограниченности энергетических ресурсов системы, это нарастание должно прекратиться или смениться уменьшением амплитуды отклонения. Любой

новый режим должен иметь конечную амплитуду и управляют этими процессами нелинейные законы. Мы говорим о нелинейности в том случае, когда свойства системы непосредственно зависят от ее состояния. Приведем пример. Пусть зависимость амплитуды отклонения $f(x)$ от исходного состояния x определяется следующим соотношением:

$$f(x) = kx - bx^3, \quad (83)$$

где k и b – постоянные положительные коэффициенты. Если $x \ll 1$, то $bx^3 \ll kx$ и

$$f(x) \cong kx. \quad (84)$$

В случае (84) $f(x)$ линейно растет с ростом x . Если же x становится сравнимым с единицей, то членом bx^3 пренебрегать уже нельзя. В случае (83) рост отклонения $f(x)$ за счет члена kx начнет испытывать нелинейное ограничение в силу вычитания величины bx^3 . При некоторых значениях x величина отклонения (83) вновь будет близка к нулю и все начнется сначала: отклонение начнет нарастать, достигнет максимума и затем, испытывая ограничение, опять уменьшится. Система будет как бы автоматически себя регулировать, так как ее свойства зависят от ее текущего состояния.

Неустойчивость и нелинейное ограничение

Теперь рассмотрим неустойчивую детерминированную систему с учетом действия механизма нелинейного ограничения нарастаний возмущений. Для простоты рассмотрим состояние равновесия, которому отвечает точка в пространстве фазовых координат системы. Выведем систему из равновесия малым отклонением. Это возмущение начнет нарастать в

силу неустойчивости. Далее нарастание возмущения начнет замедляться (вступит в силу механизм нелинейного ограничения). Что можно ожидать в этой ситуации? Во-первых: в силу нелинейного ограничения отклонение уменьшится строго до нуля. Система вернется в исходное состояние равновесия. Теоретически это возможно, однако очень маловероятно, так как исходное состояние равновесия неустойчиво. Более вероятна вторая ситуация: система вернется в малую окрестность исходного состояния (подойдет очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнет от него удаляться. Этот процесс будет длиться бесконечно во времени! Но реализация такого процесса требует некоторых специальных условий.

Предположим, что мы имеем дело с двумерной дифференциальной динамической системой. Пространство ее состояний – фазовая плоскость с координатами x и y . Если малое возмущение состояния равновесия в такой системе будет нарастать, а в результате нелинейного ограничения далее уменьшаться, то возможны два варианта: появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого, либо выход траектории на новый режим, отвечающий периодическим колебаниям.

Второй вариант иллюстрирует рис. 33. При малых амплитудах возмущения (рис. 33,а) траектория по спирали удаляется от точки равновесия O . При больших отклонениях (рис. 33,б) траектория возвращается. В результате вместо потерявшего устойчивость состояния равновесия появляется новый режим – периодические автоколебания, которым отвечает предельный цикл Γ на фазовой плоскости.

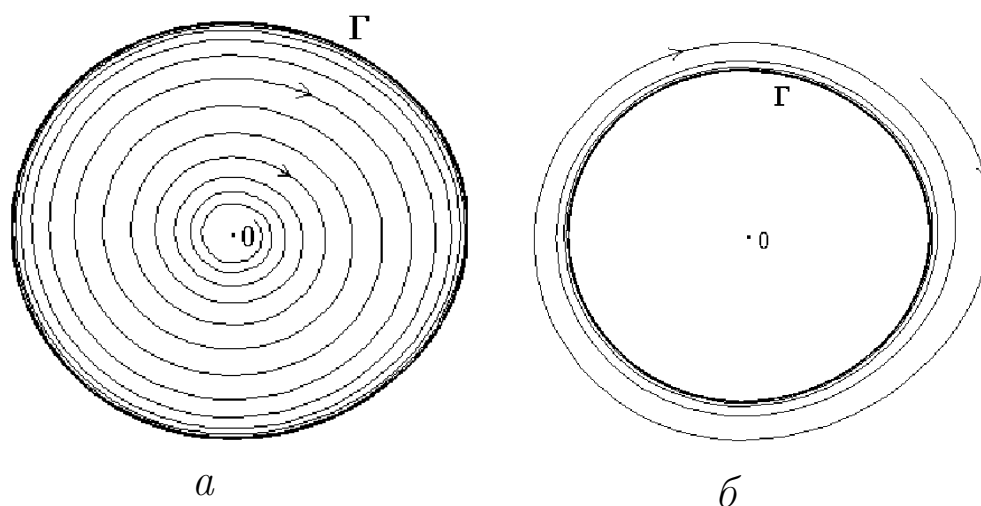


Рис. 33. Рождение устойчивого предельного цикла Γ в окрестности неустойчивого равновесия O . Поведение траекторий при малых отклонениях от равновесия (*a*) и при больших (*б*)

Неустойчивость состояния равновесия в двумерной системе при наличии механизма нелинейного ограничения нарастания возмущений порождает новый режим – режим устойчивых периодических колебаний. Если мы вообразим себе иную ситуацию, когда отклонение от состояния равновесия вначале нарастает, а затем в силу нелинейности вновь стремится к нулю, мы придем к противоречию: фазовая траектория обязана будет самопересекаться! (рис. 34). Но это будет означать, что существуют различные начальные условия, приводящие в процессе эволюции к одинаковым состояниям! Это невозможно в силу понятия детерминизма, которое в данном примере проявляется в содержании теоремы единственности решения: при заданных начальных условиях решение существует и оно *единственное*, другого не дано.

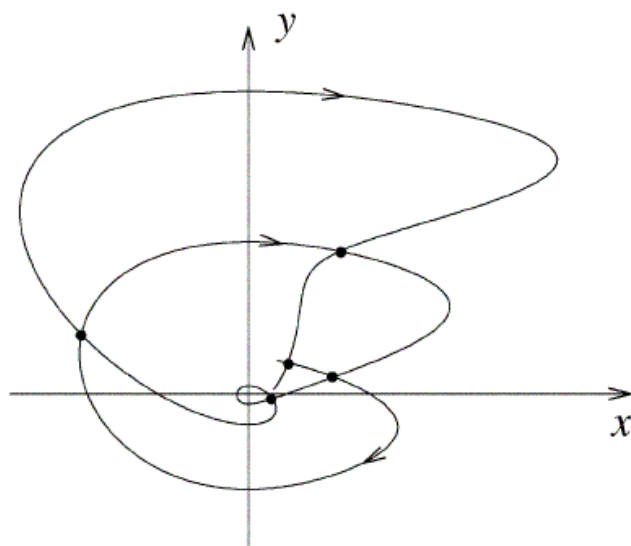


Рис. 34. Поведение динамической системы, которое невозможно реализовать на плоскости в силу пересечения фазовых траекторий. Реально эта картина получается путем проекции трехмерной траектории на плоскость двух переменных

Детерминированный хаос

Картина принципиально изменится, если мы рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется тремя независимыми переменными (фазовыми координатами). Другими словами, давайте повторим наши рассуждения, осуществив выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство. Ничто не запрещает нам реализовать ситуацию рис. 34 в пространстве трех измерений. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от точки O по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие механизма нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния. Далее, ввиду неустойчивости, процесс будет повторяться. Возможны два варианта: траектория, спустя конечное время, замкнется, демонстрируя наличие некоторого сложного, но периодического

процесса; траектория будет воспроизводить некий апериодический процесс, если при $t \rightarrow \infty$ замыкания не произойдет. Второй случай и отвечает режиму детерминированного хаоса! Действительно, работает основной принцип детерминизма: будущее однозначно определено начальным состоянием. Однако, процесс эволюции системы сложный, непериодический. Чисто внешне он ничем не отличается от случайного! Однако, при более детальном анализе вскрывается одно важное отличие этого процесса от случайного: этот процесс воспроизводим! Действительно, повторив еще раз начальное состояние, в силу детерминированности мы вновь однозначно воспроизведем ту же самую траекторию независимо от степени ее сложности. Значит этот непериодический процесс не является хаотическим в смысле определения хаоса, данного нами выше? Да, это сложный, похожий на случайный, но тем не менее детерминированный процесс. Важно здесь то, что он характеризуется неустойчивостью и это обстоятельство позволяет нам понять еще одно принципиально важное свойство систем с детерминированным хаосом – *перемешивание*.

Перемешивание

Мы установили, что в диссипативных системах, размерность фазового пространства которых $N \geq 3$, теоретически возможен режим сложных непериодических пульсаций. Этот тип движения детерминирован и характеризуется неустойчивостью. К чему это приводит? Давайте рассуждать. Вначале поговорим об устойчивых режимах движения в детерминированных диссипативных динамических системах.

Рассмотрим в качестве начального состояния не точку с определенными координатами в пространстве состояний \mathbf{x}^0 , а малую сферу радиуса $\varepsilon > 0$, окружающую эту точку. Любая точка внутри сферы характеризует малое отклонение от \mathbf{x}^0 . Сфера включает совокупность возможных отклонений от исходного состояния, не превышающих по модулю ε . Теперь применим оператор эволюции и проследим за трансформацией этой сферы. В силу устойчивости выбранного нами режима любое малое отклонение во времени должно затухать! Это означает, что под действием детерминированного закона эволюции шарик радиуса ε во времени будет уменьшаться и при $t \rightarrow \infty$ его радиус уменьшится до нуля! Сказанное выше иллюстрирует рис. 35. Исходный фазовый объем в диссипативных системах во времени уменьшается. Это означает в данном случае, что малые возмущения в итоге будут затухать и система вновь вернется в исходный режим, который является устойчивым.

А если исходный режим неустойчив? Что будет в этом случае? Фазовый объем может увеличиваться до бесконечности, если неустойчивая система линейна. Но если система нелинейна и диссипативна, то процесс эволюции начального малого фазового объема будет весьма нетривиальным. Попробуем это понять.

Неустойчивость режима ведет к росту возмущений. Это одно обстоятельство. Второе – диссипативные системы вне зависимости от вида устойчивости вызывают уменьшение элемента фазового объема во времени до нуля, что связано с потерями энергии. Как совместить эти два фактора? Существует единственное решение этой дилеммы: элемент фазового

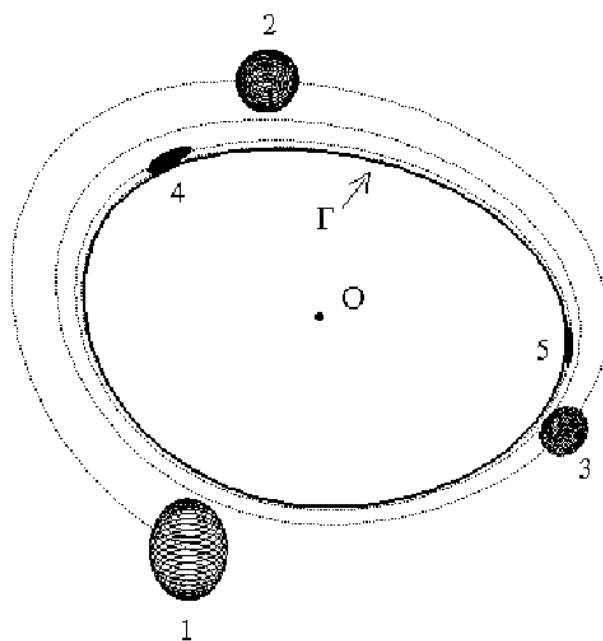


Рис. 35. Сжатие первоначальной области неопределенности 1 во времени в случае, когда цикл Γ является устойчивым предельным режимом

объема по некоторым направлениям должен растягиваться, а по другим сжиматься. Причем, степень сжатия в среднем должна обязательно превалировать над степенью расширения, чтобы в итоге фазовый объем во времени уменьшался! В нелинейных диссипативных системах это оказывается возможным. Вышесказанное иллюстрирует рис. 36. В силу наличия механизма нелинейного ограничения фазовая траектория сложного режима колебаний сосредоточена в ограниченной области фазового пространства. При этом любая малая окрестность исходного начального состояния эволюционирует так, как показано на рис. 36 и в итоге премещивается по всей области, занятой траекторией. Этот процесс весьма трудно представить себе наглядно.

Проведем мысленный эксперимент. В стакан с водой поместим маленькую чайнку и размешаем воду чайной ложкой, вызвав неустойчивость. Чайнка будет при этом двигаться по

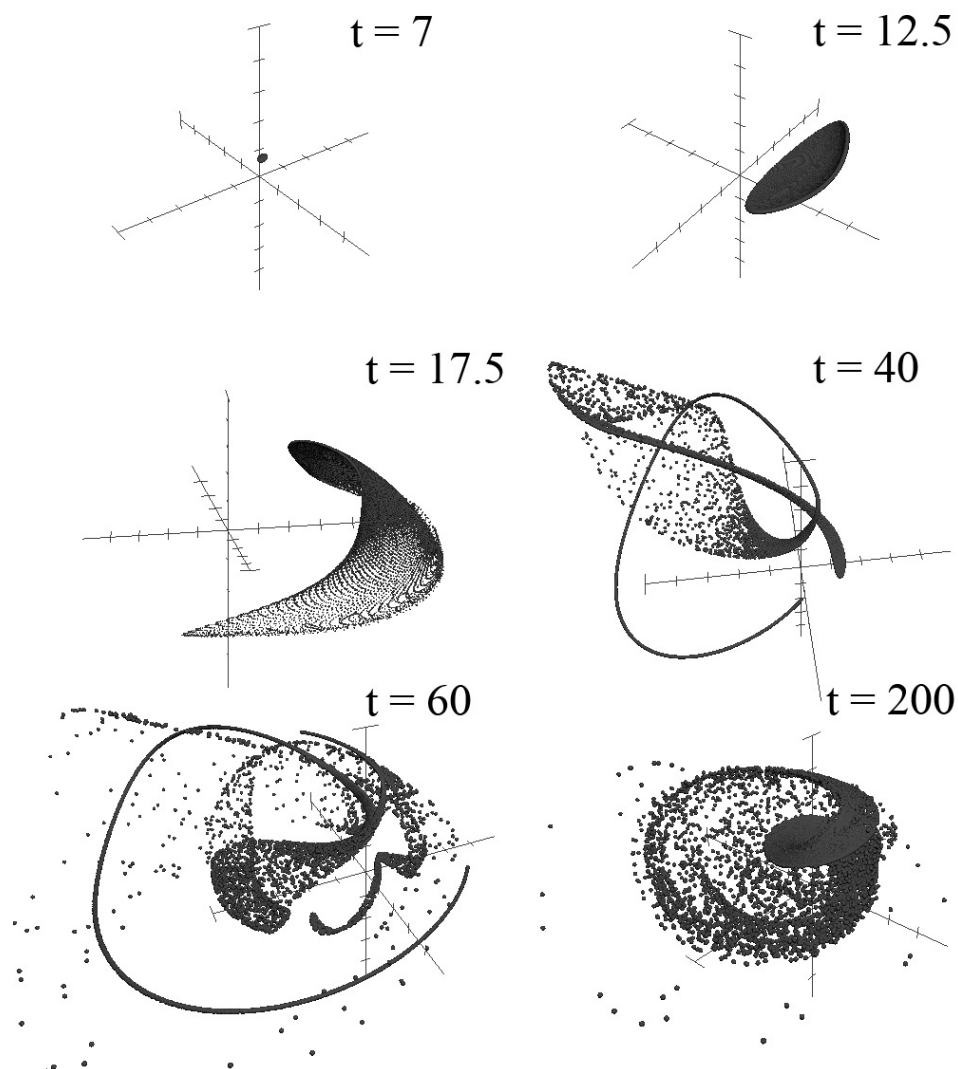


Рис. 36. Эволюция во времени малого первоначального фазового объема размера $\varepsilon = 0.1$, содержащего 200 начальных точек, в системе Анищенко–Астахова (67) при $m = 1.5$, $g = 0.2$

сложной спиралеобразной траектории, которая обусловлена движением воды в стакане. При этом в любой заданный момент времени мы теоретически можем зафиксировать ее координаты $\mathbf{x}(t)$ в объеме воды! Теперь вместо чайники поместим в стакан с водой очень маленькую капельку чернил и вновь размешаем воду чайной ложкой. Что при этом произойдет? Чернила практически равномерно разбегутся по всему объе-

му воды, слегка окрасив ее! Частички чернил, первоначально сосредоточенные в маленьком объеме капельки, спустя время перемешивания можно будет обнаружить в *любой* части объема воды в стакане! В жизни этот процесс мы привыкли называть перемешиванием. В математике это понятие также существует и, с точки зрения физической интерпретации, оказывается весьма близким по смыслу. Действительно, поток воды в стакане, созданный движением чайной ложки, можно интерпретировать как действие детерминированного эволюционного оператора динамической системы. Чаинка при этом будет двигаться по сложной, но детерминированной (хотя и очень сложной) траектории. А капелька чернил, которую можно интерпретировать как некий маленький объем в фазовом пространстве вокруг чаинки, под действием оператора эволюции перемешивается по всему объему воды!

Вероятностные свойства детерминированных систем

Таким образом, в неустойчивых режимах в детерминированных нелинейных системах с перемешиванием мы можем предсказать будущее состояние однозначно только в случае строгого задания начальных условий. Однако, если учесть сколь-угодно малую, но конечную ошибку (т.е. рассмотреть капельку чернил вместо чаинки), то детерминированное предсказание становится невозможным. Малая область первоначальной неопределенности размывается за счет перемешивания на конечную область в фазовом пространстве. Теперь мы имеем дело с процессом, который ассоциируется с настоящей случайностью, с настоящим хаосом!

Основным свойством динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Именно это обстоятельство ведет по сути дела к потере детерминированной предсказуемости и необходимости вводить вероятностные характеристики для описания динамики таких систем. В этом смысле становится понятным термин "детерминированный хаос" который характеризует рождение случайного, непредсказуемого поведения системы, которое управляется детерминированными законами.

Неопределенность в задании начального состояния – ситуация вполне реальная с точки зрения физики. Действительно, в силу конечной точности регистрации состояния любыми приборами, оно определяется с конечной (пусть сколь угодно малой) ошибкой. Это означает, что мы должны анализировать эволюцию во времени не начальной точки, а начальной области вокруг этой точки. В силу перемешивания мы столкнемся с процессом, подробно описанным выше.

Детерминированный хаос – математическая экзотика или типичное свойство материального мира?

Путем простейших рассуждений мы пришли к выводу о возможности режима детерминированного хаоса в нелинейных системах с диссипацией энергии. В современной науке этот эффект строго обоснован теоретически и достоверно подтвержден экспериментально. Может возникнуть вопрос, не является ли этот феномен математической экзотикой в том смысле, что его реализация теоретически возможна, но практиче-

ски – маловероятна? Нет, и еще раз нет! После открытия детерминированного хаоса, ясного понимания свойств эффекта и разработки методов его диагностики хаос был обнаружен практически во всех областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике, экономике и др. Может возникнуть естественный вопрос, почему до недавнего времени этот типичный режим функционирования динамических систем не был обнаружен и описан? Этому есть объяснение.

Хотя теоретически подавляющее число реальных материальных систем и процессов нелинейны, существует широкий класс процессов, достаточно корректно описываемых в линейном или квазилинейном приближении. Линейная теория динамических систем и процессов разработана достаточно полно и позволяет дать их исчерпывающее описание, хорошо согласующееся с экспериментом. Но детерминированный хаос – явление, присущее исключительно нелинейным системам! А в отношении нелинейной теории дела обстоят намного хуже. Пока не существует, например, общей теории решения нелинейных дифференциальных уравнений. Анализ динамики нелинейных систем и сейчас требует искусства, творческого подхода, индивидуального в каждом конкретном случае.

Именно отсутствие строгих теоретических результатов применительно к нелинейным системам сдерживало открытие и понимание этого универсального явления. Экспериментаторы давно сталкивались с проявлением хаоса. Однако, ограниченность теоретических знаний, обусловленная влиянием линейной и квазилинейной структуры научного мышления, приводила к ошибкам в трактовке наблюдаемых результатов. Де-

лался вывод о том, что шумоподобные колебания обусловлены либо действием флуктуаций, либо огромным числом степеней свободы системы, либо неисправностью измерительной аппаратуры.

Сейчас положение изменилось. Наша жизнь все более настоятельно требует количественного учета таких факторов как сверхвысокая плотность, сверхвысокая температура, давление, сверхвысокие скорости, плотности населения и т.д. А, как известно, учет этих факторов требует принципиально нелинейного подхода к описанию эволюционных процессов. Эти процессы моделируются и анализируются с помощью компьютеров, для которых нелинейность модели не является препятствием для ее детального анализа. И выяснилось, что в таких системах хаотический режим функционирования скорее правило, чем исключение!

Странные аттракторы

Математическим образом режима функционирования диссипативной динамической системы служит *аттрактор* – множество предельных траекторий изображающей точки в фазовом пространстве, к которому стремятся все исходные режимы. Если этот режим есть устойчивое состояние равновесия – аттрактор системы будет просто неподвижной точкой, если это устойчивое периодическое движение – аттрактором будет замкнутая кривая, называемая предельным циклом. Раньше считалось, что аттрактор есть образ исключительно устойчивого режима функционирования системы. Сейчас мы понимаем, что режим детерминированного хаоса тоже аттрактор в смысле определения предельной траектории в ограниченной

области фазового пространства (см. рис. 28). Однако такой аттрактор имеет два существенных отличия: траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают). Именно эти отличия и привели к необходимости ввести в рассмотрение новый термин. С легкой руки французского математика Ф. Такенса такие аттракторы стали называть *странными*.

Каков критерий “странности”? Как установлено теоретиками, основным критерием странности аттрактора является неустойчивость траектории. Причем неустойчивость обязана быть экспоненциальной! Это означает, что малое возмущение режима $D(0)$ должно во времени увеличиваться по экспоненте:

$$D(t) = D(0) \exp(\lambda t), \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}, \quad (85)$$

где λ – показатель Ляпунова.

Оказалось, что положительность величины λ говорит не только об экспоненциальной неустойчивости режима колебаний, но доказывает наличие в системе перемешивания. Если установлено, что исследуемый режим имеет $\lambda > 0$, то следствием будут: непериодичность в зависимости от времени любой из координат состояния, сплошной спектр мощности (в спектре колебаний присутствуют все частоты из некоторого интервала) и спадающая во времени автокорреляционная функция. До недавнего времени с таким поведением указанных характеристик однозначно связывали представления о случайном процессе. Теперь мы знаем, что подобными свойствами может обладать процесс, порождаемый детерминиро-

ванными законами. Это обстоятельство и послужило основанием называть такие процессы детерминированным хаосом.

Необходимо отметить, что впервые режим детерминированного хаоса был установлен американским исследователем Э. Лоренцем. Им в 1963 году была опубликована прекрасная работа, в которой численно обоснован режим хаотических колебаний в детерминированной системе размерности $N = 3$ (знаменитой модели Лоренца). Однако, как это часто бывает, читатели статьи не восприняли серьезно этот пионерский результат в силу самых разных причин. И только спустя восемь лет французские математики Д. Рюэль и Ф. Такенс доказали теоретически возможность реализации такого режима в детерминированных системах. Именно в их работе этот режим и был назван “странным аттрактором”.

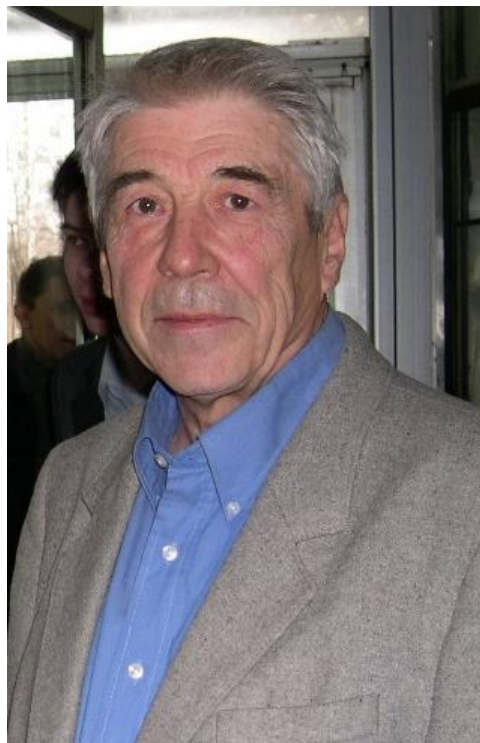
Отметим, что очень серьезный вклад в теорию детерминированного хаоса был внесен профессором Нижегородского университета Л.П. Шильниковым и его учениками. В частности, В.С. Афраймовичем, В.В. Быковым и Л.П. Шильниковым дано теоретическое обоснование механизма рождения странного аттрактора в модели Лоренца.

Итак, в результате простого качественного рассмотрения особенностей нелинейных диссипативных динамических систем мы пришли к ряду новых принципиальных выводов, основные из которых следующие:

1. В дифференциальных системах с размерностью фазового пространства $N \geq 3$ теоретически возможны установившиеся непериодические режимы колебаний.



Эдвард Лоренц, американский
математик и метеоролог
(1917–2008)



Леонид Павлович Шильников,
российский математик
(1934–2011)

2. Принципиальной особенностью таких колебаний является их неустойчивость, что приводит к чувствительной зависимости динамики системы от малых возмущений.
3. Неустойчивость нелинейной системы в совокупности с ограниченностью энергии колебаний может вызывать перемешивание.
4. Наличие перемешивания приводит к необходимости введения статистического описания динамики детерминированных систем со странными аттракторами как наиболее удобного.

Перечисленные результаты убеждают нас в том, что режимы функционирования детерминированных нелинейных систем со странными аттракторами действительно обладают рядом

специфических свойств, совокупность которых включается в понятие “детерминированный хаос”.

2.4 Фракталы

2.4.1 Понятие фрактала

Термин “*фрактал*” впервые был введен Б. Мандельбротом в 1975 году для обозначения нетривиальных геометрических объектов и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги “Фрактальная геометрия природы”. **Фрактал** (лат. *fractus* – дробленный, дробный) – это геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: “Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому”. В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую (фрактальную) размерность, либо метрическую размерность, отличную от топологической. Для “обычных” множеств обе размерности совпадают. “Обычными” множествами являются многообразия, к которым относятся точка, линия, поверхность и т.д. Под топологической размерностью многообразия понимают число координат, определяющих положение точки на многообразии. Например, для однозначного задания точки на отрезке достаточно знать только одну координату, а на торе – две и т.д. Таким образом, регулярные множества имеют целую неотрицательную топологическую размерность.



Бенуа Мандельброт,
французский и американский
математик, создатель фрактальной
геометрии (1924–2010)

Если рассмотреть более сложный объект – множество с масштабно-инвариантной структурой (фрактал), то в этом случае заранее неизвестно, какое минимальное число координат нужно для однозначного описания его точек. Оказалось, что подобные объекты характеризуются дробной фрактальной размерностью, что и объясняет само название “фрактал”.

Фрактальная размерность множеств

Пусть d – обычная евклидова размерность пространства, в котором находится фрактальный объект ($d = 1$ – линия, $d = 2$ – плоскость, $d = 3$ – обычное трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d -мерными “шарами” (или кубиками) радиуса ε . Пусть $N(\varepsilon)$ – минимальное количество шаров, необходимых для покрытия данного

объекта. Тогда, если при достаточно малых ε величина $N(\varepsilon)$ меняется с ε по степенному закону $N(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^D$, то величина $D = D_F$ является метрической размерностью и называется *емкостью* или *фрактальной* размерностью. Эту формулу можно переписать в виде

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (86)$$

Выражение (86) служит определением фрактальной размерности D_F .

Для регулярных множеств (например, части трехмерного евклидова пространства, поверхности или линии) фрактальная размерность D_F равна целому числу (соответственно 3, 2, 1) и совпадает с обычной (топологической) размерностью. Действительно, для малых ε из формулы (86) получаем

$$N \sim K\varepsilon^{-D_F}. \quad (87)$$

Число кубиков со стороной ε , необходимое для покрытия некоторого объема в трехмерном пространстве, пропорционально $1/\varepsilon^3$, а для покрытия поверхности — $N \sim 1/\varepsilon^2$ и линии — $N \sim 1/\varepsilon$. Следовательно, если мы имеем простой (регулярный) аттрактор в виде предельного цикла (замкнутая инвариантная кривая), то его фрактальная размерность равна единице. Для инвариантного двумерного тора $D_F = 2$.

Однако для нерегулярных множеств, обладающих масштабно-инвариантной структурой, фрактальная размерность имеет дробное значение. Детально данный факт будет проиллюстрирован далее.

Применение теории фракталов

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (дыхательная система, система кровеносных сосудов).

Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система и система альвеол человека или животных.

В наши дни теория фракталов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. Помимо фрактальной живописи фракталы используются в теории информации для сжатия графических данных. Здесь в основном применяется свойство самоподобия фракталов: ведь чтобы запомнить небольшой фрагмент рисунка и преобразования, с помощью которых можно получить остальные части, требуется гораздо меньше памяти, чем для хранения всего файла. Добавляя в формулы, задающие фрактал, случайные возмущения, можно получить стохастические фракталы, которые весьма правдоподобно передают некоторые реальные объекты — элементы рельефа, поверхность водоемов, некоторые растения, что с успехом применяется в физике, географии и компьютерной графике для достижения большего сходства моделируемых предметов с настоящими. В радиоэлектронике в последнее десятилетие начали выпускать ан-

тенны, имеющие фрактальную форму. Занимая мало места, они обеспечивают вполне качественный прием сигнала. Экономисты используют фракталы для описания кривых колебания курсов валют (это свойство было открыто Мандельбротом более 30 лет назад).

2.4.2 Примеры фрактальных множеств

Фрактальные множества можно разделить на *конструктивные* или *геометрические* (искусственно построенные), *динамические* или *алгебраические* (порождаемые динамическими системами), *стохастические* (формирующиеся в соответствии со случайными закономерностями) и *естественные* (существующие в природе).

Конструктивные или геометрические фракталы

Фракталы этого класса самые наглядные. В двумерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

Одним из простейших и широко известным примером конструктивного фрактала является *канторово множество* или “*множество средних третей*”, описанное Георгом Кантором в 1883 г.

Возьмем отрезок единичной длины $[0, 1]$, разделим его на три равные части и вырежем среднюю из них — интервал $(1/3, 2/3)$. Проведем такую же процедуру с каждым из остав-

шихся отрезков. Тогда мы получим последовательность отрезков все убывающей длины (рис. 37).

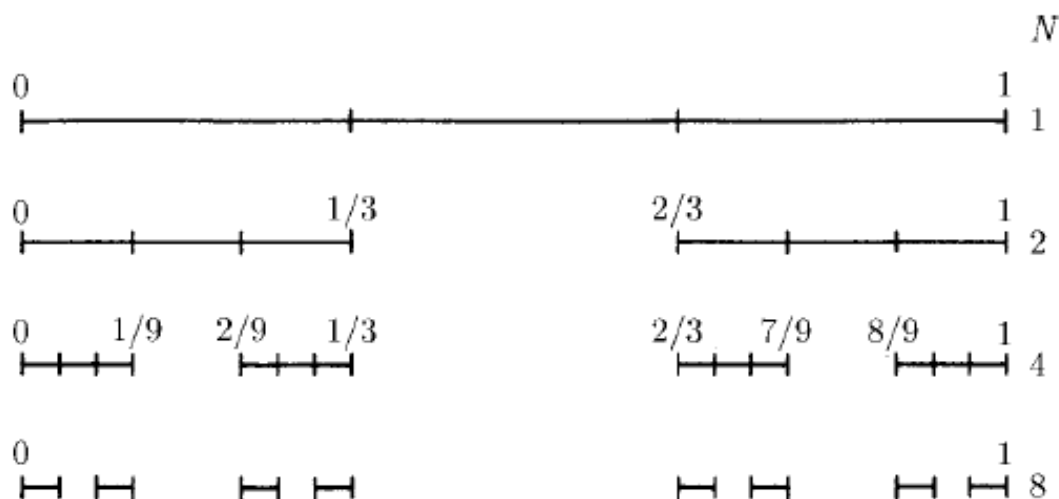


Рис. 37. Построение множества Кантора

На первом шаге построения имеем один отрезок, на втором — два, на третьем — четыре. На k -м шаге будем иметь $N = 2^k$ отрезков, не связанных друг с другом, длиной $1/3^k$ каждый. При $k \rightarrow \infty$ получим некоторое множество, которое и называется *множеством Кантора* или *пыль Кантора*. Суммарная длина всех вырезанных отрезков при этом равна единице:

$$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Значит, множество Кантора имеет нулевую меру (нулевую длину), т.е. топологическая размерность $d = 0$.

Используя формулу (86) и считая, что на k -м шаге построения величина ячейки покрытия ε равна длине удаляемого отрезка ($1/3^k$), получаем фрактальную размерность канторова множества:

$$D_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63092 \dots, \quad (88)$$

которая является дробным числом.

Из рис. (37) видно, что канторово множество удовлетворяет определению фрактала: каждый его элемент, полученный из какого-то отрезка на некотором уровне построения, подобен всему множеству целиком и переходит в него при соответствующем перемасштабировании.

Оказывается, что странные аттракторы динамических систем с непрерывным или дискретным временем имеют структуру канторова множества. Этим они с геометрической точки зрения отличаются от простых (регулярных) аттракторов, являющихся многообразиями. Следовательно, фрактальная размерность странного аттрактора также будет дробной.

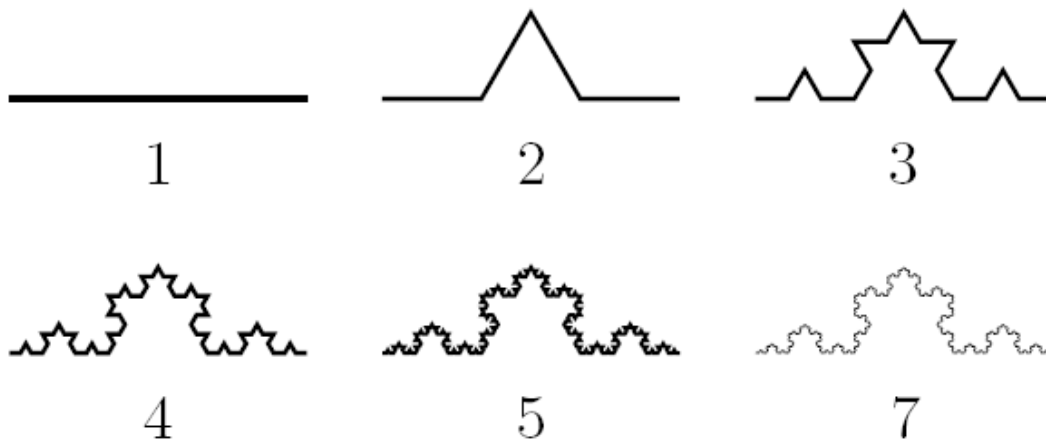


Рис. 38. Построение кривой Коха (цифрами обозначены шаги построения)

Другим классическим примером фрактала является фрактальная кривая, сконструированная шведским математиком Нильсом Фабианом Хельге фон Кох. Рисунок 38 показывает, как по шагам строится *кривая Коха*. На первом шаге

имеем единичный отрезок. Потом он делится на три равные части, центральная достраивается до правильного треугольника и затем выбрасывается. На втором шаге получается ломаная линия, состоящая из четырех отрезков. К каждому из них применяется такая же операция, и получается третий шаг построения. Продолжая процедуру до бесконечности, получаем в пределе сложную кривую, длина которой бесконечна.

Если применить такую же процедуру к равностороннему треугольнику с единичной длиной стороны, то получим фрактальное множество, называемое “*снежинкой Коха*” (рис. 39). На каждой стороне исходного треугольника среднюю треть заменяем ломаной из двух отрезков той же длины. Полученное в результате бесконечного итерационного процесса фрактальное множество представляет собой линию бесконечной длины, которая расположена на двумерной поверхности. Действительно, при каждом шаге число сторон результирующего многоугольника увеличивается в 4 раза, а длина каждой стороны уменьшается только в 3 раза, т.е. длина многоугольника на n -ой итерации равна $3 \cdot (4/3)^n$ и стремится к бесконечности с ростом n .

Самоподобный фрактал, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году, формируется по следующим правилам. Исходным множеством, соответствующим нулевому шагу, является равносторонний треугольник (рис. 40). Затем он разбивается на четыре области путем соединения середины сторон исходного треугольника отрезками прямых. Затем удаляется внутренность центральной области исходного треугольника — малый внутренний “перевернутый” треугольник. На следующем шаге итерации этот процесс по-

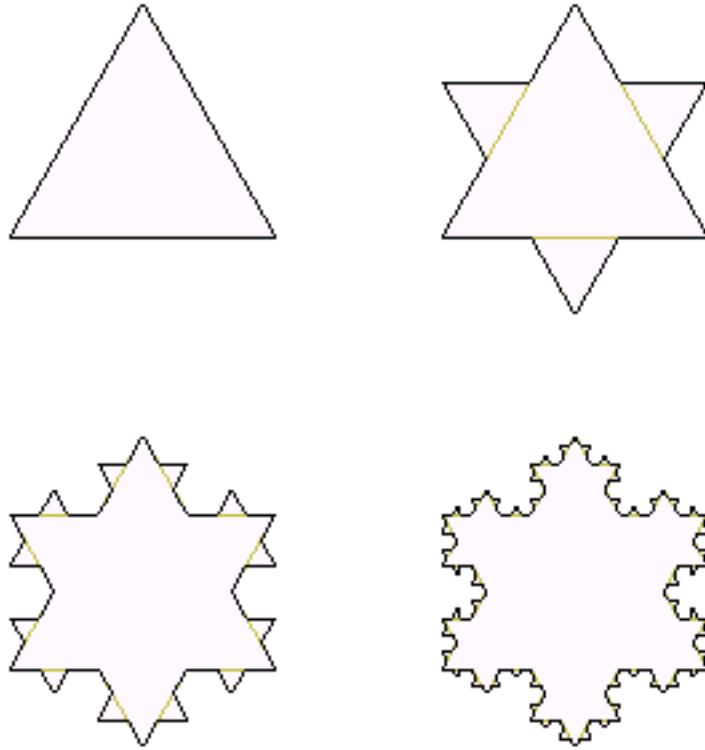


Рис. 39. Пять итераций построения снежинки Коха

вторяется для каждого из трех оставшихся треугольников. Продолжая описанную процедуру до бесконечности, образуется множество, называемое *салфеткой Серпинского*.



Рис. 40. Построение салфетки Серпинского

Этот фрактал интересен тем, что занимаемая им площадь равна нулю. Для обоснования этого факта подсчитаем суммарную площадь частей, исключенную при построении. На первом шаге выбрасывается четвертая часть площади исходного треугольника, на втором шаге у каждого из трех треугольников удаляется четвертая часть площади и т.д. Таким образом, полная удаленная площадь вычисляется как сумма ряда:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 3/4} = 1.$$

Таким образом, исключенная площадь совпадает с площадью исходного треугольника, а площадь оставшейся части салфетки равна нулю.

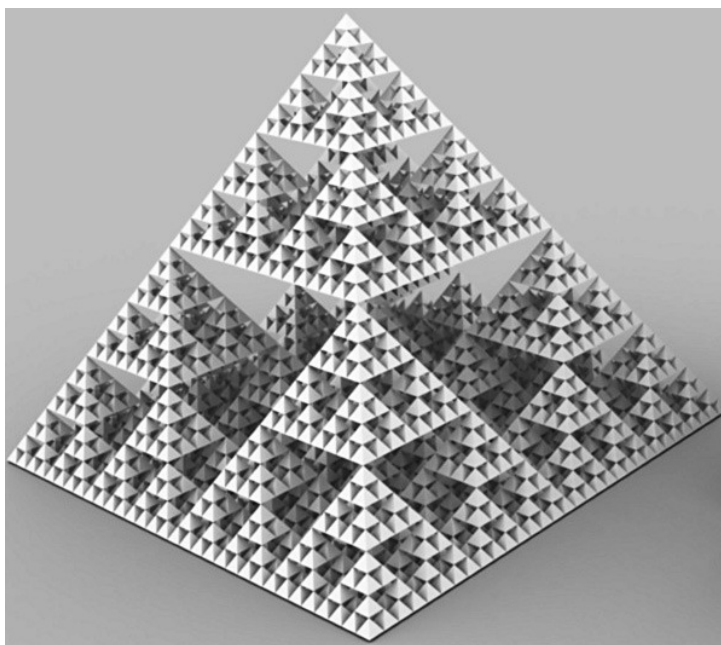


Рис. 41. Пирамида Серпинского

Трехмерный аналог салфетки (треугольника) Серпинского образует *пирамиду Серпинского* (рис. 41).

Квадратная версия салфетки была описана В. Серпинским в 1916 году. Это непосредственное обобщение канторова множества средних третей на случай плоских фигур. Квадрат со стороной, равной единице, делится на 9 равных квадратов прямыми, параллельными его сторонам. Затем при первой итерации удаляется центральный квадрат. Аналогичная процедура повторяется для оставшихся 8 квадратов и т. д. В результате бесконечного числа итераций получаем фрактальную фигуру — *ковер Серпинского* (рис. 42).

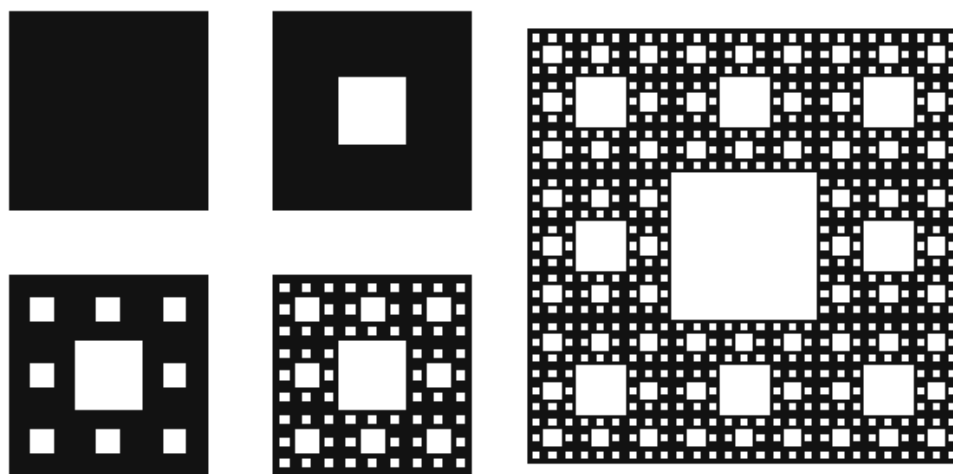


Рис. 42. Построение ковра Серпинского

Аналогичная процедура построения в трехмерном пространстве приводит к фракталу, созданному австрийским ученым Карлом Менгером и широко известному как *губка Менгера* (см. 43).

Определим теперь фрактальную размерность ковра Серпинского. Имеем

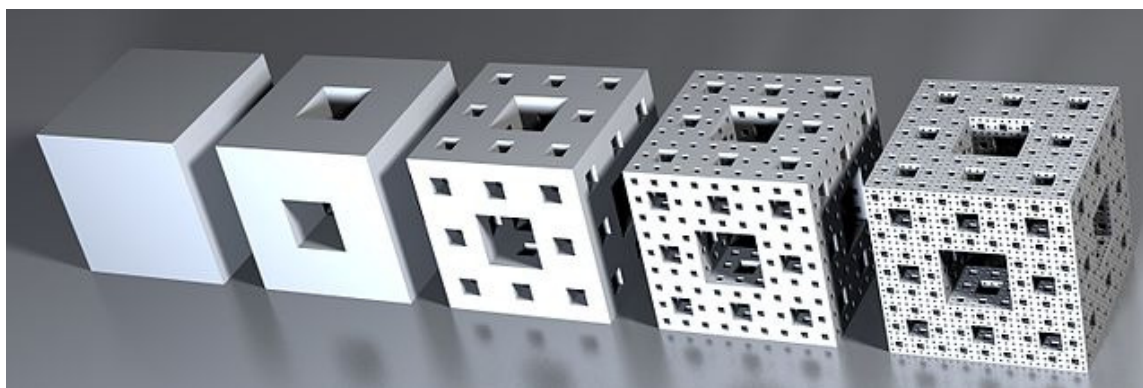


Рис. 43. Построение губки Менгера

$$\begin{array}{lll}
 k = 1, & N = 8 = 8^1, & \varepsilon = 1/3^1, \\
 k = 2, & N = 8 \cdot 8 = 8^2, & \varepsilon = 1/3^2, \\
 k = 3, & N = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3, & \varepsilon = 1/3^3, \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots \\
 k = m, & N = 8^m, & \varepsilon = 1/3^m.
 \end{array}$$

Отсюда

$$D_F = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^m}{\ln 3^m} = \frac{8}{3} \approx 1.893. \quad (89)$$

Таким образом, ковер Серпинского — это уже не линия, размерность которой равна единице, но еще и не поверхность, поскольку размерность поверхности равна двум. Это что-то “между” линией и двумерной поверхностью.

Дерево Пифагора — еще один пример классического фрактала. Он называется так потому, что каждая тройка попарно соприкасающихся квадратов ограничивает прямоугольный треугольник и получается картинка (рис. 44, а), которой часто иллюстрируют теорему Пифагора: “Пифагоровы штаны во все стороны равны”. В классическом дереве Пифагора угол равен 45 градусам, но также можно построить и обобщенное дерево Пифагора при использовании других углов.

Такое дерево часто называют *обдуваемое ветром дерево Пифагора* (рис. 44,б). Если изображать только отрезки, соединяющие каким-либо образом выбранные “центры” треугольников, то получается *обнаженное дерево Пифагора* (рис. 44,в).

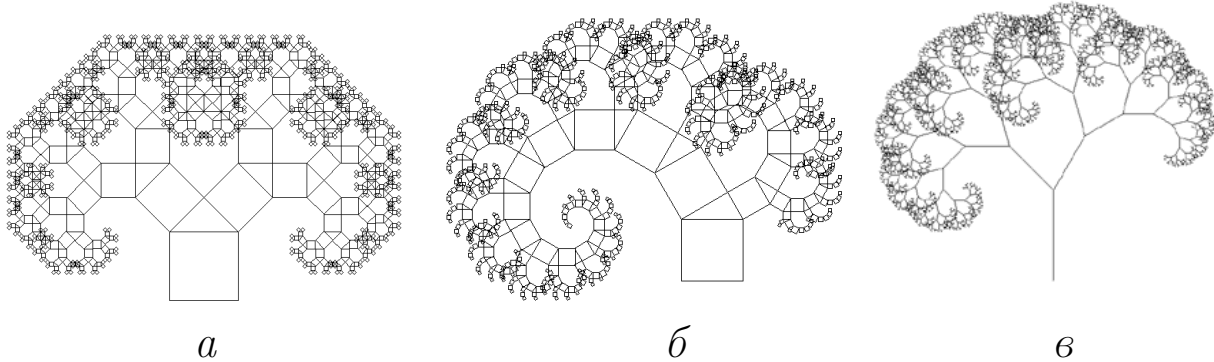


Рис. 44. Классическое дерево Пифагора (а), обдуваемое ветром дерево Пифагора (б) и обнаженное дерево Пифагора (в)

Динамические или алгебраические фракталы

Фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем. Динамическими фракталами являются странные хаотические аттракторы, возникающие в системах с непрерывным и дискретным временем. Кроме того, границы бассейнов притяжения нескольких сосуществующих аттракторов в нелинейной диссипативной системе могут быть фрактальными.

Рассмотрим хаотический аттрактор двумерного отображения Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}\tag{90}$$

Мы увидим свойство масштабной инвариантности (скейлинга): одна и та же структура повторяется во все более мелком

масштабе (рис. 45). Сам аттрактор Эно похож на фрактальное множество, порождаемое подковой Смейла.

Фрактальный характер хаотического аттрактора можно пояснить следующим образом. Рассмотрим хаотический аттрактор системы, задаваемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, с фазовым пространством R^3 . Любое обратимое двумерное отображение (в том числе и отображение Эно) можно мысленно представлять себе как отображение Пуанкаре, возникающее в сечении трехмерного потока. Непрерывные траектории на аттракторе в R^3 расходятся. В силу сжатия фазового объема размерность аттрактора должна быть меньше, чем размерность фазового пространства системы (то есть меньше трёх).

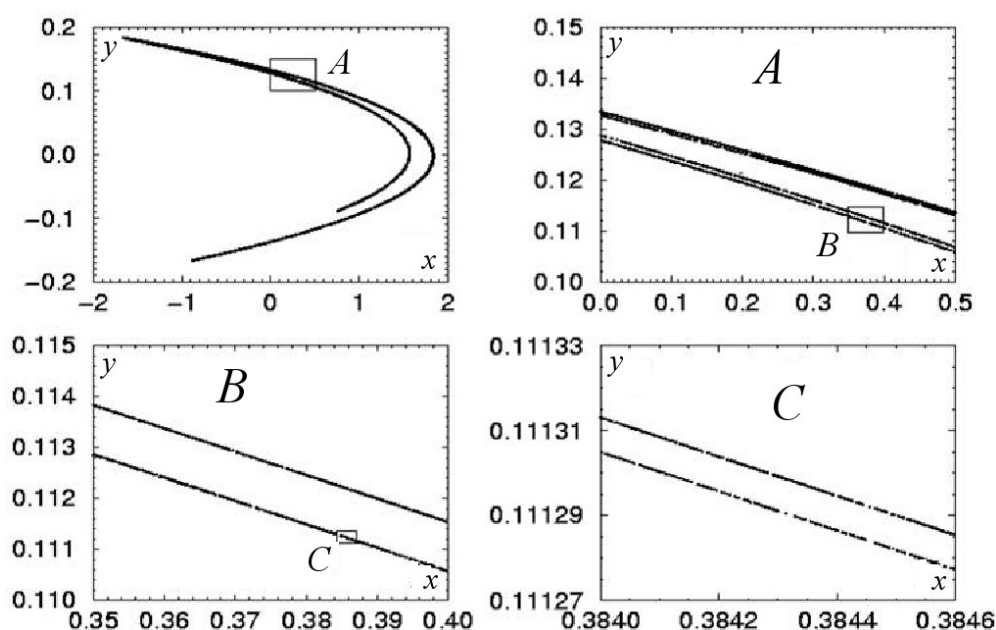


Рис. 45. Скейлинг аттрактора в отображении Эно (90) при $a = 1.71$, $b = 0.1$

Но траектории не могут расходиться на двумерном многообразии (поверхности) не пересекаясь, значит хаотический аттрактор не может быть многообразием и, таким образом, должен представлять собой фрактал. Таким образом, регулярные (простые) аттракторы являются гладкими подмногообразиями фазового пространства, а нерегулярные (странные в обобщенном смысле) аттракторы – фракталами.

Множество красивых динамических фракталов могут быть получены на основе простого отображения Жюлиа. Французский исследователь Г. Жюлиа еще в 1918 г. заинтересовался поведением точки последовательности на комплексной плоскости:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (91)$$

где z – комплексная переменная, $c = \operatorname{Re} c + i\operatorname{Im} c$ – комплексный параметр. Данное отображение может быть также представлено в виде двух вещественных отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + \operatorname{Re} c, \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + \operatorname{Im} c. \end{aligned} \quad (92)$$

Гастон Жюлиа пришёл к выводу, что последовательность точек может вести себя по-разному. Точка последовательности z_n может уходить в бесконечность либо может стремиться к некоторой конечной точке комплексной плоскости, называемой аттрактором. Таким образом, аттрактор на комплексной плоскости представляет собой точку или точки притяжения итерационного процесса или предел последовательности (91). В качестве такого аттрактора может выступать притягивающая неподвижная точка или притягивающий цикл определенного периода. Кроме того, таких аттракторов может

быть несколько. Множество всех точек комплексной плоскости с конечными аттракторами называется **множеством Жюлиа**. Если же в процессе итераций изображающая точка уходит на бесконечность, то аттрактором такого процесса считается бесконечно удаленная точка.

Вид множества Жюлиа зависит от значения комплексного параметра c . На рис. 46 изображено множество Жюлиа для различных значений параметра c (см. также цветную вкладку). Точнее, это не само множество (которое в данном случае состоит из несвязных точек и не может быть нарисовано), а точки из его окрестности. Чем ярче точка, тем ближе она к множеству Жюлиа и тем больше итераций ей нужно, чтобы уйти от нуля на заданное большое расстояние.

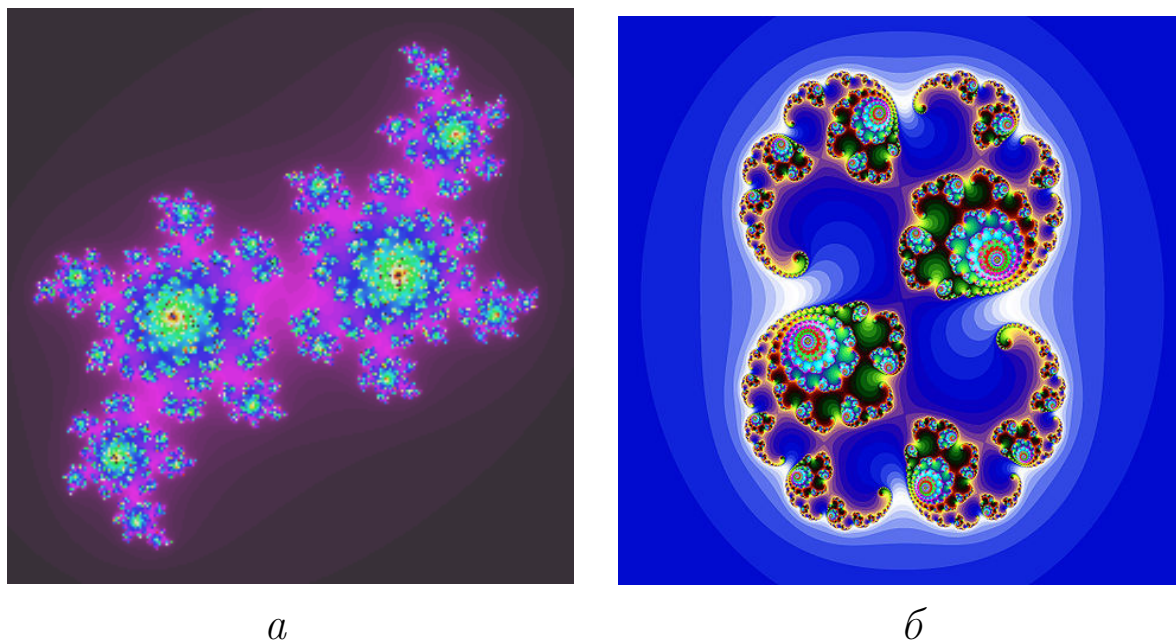


Рис. 46. Множества Жюлиа при различных значениях параметра c :
 (а) $c = -0.39 - 0.586i$; (б) $c = -0.268 - 0.003i$

При некоторых значениях множество Жюлиа теряет связность и рассыпается на множество мелких осколков. Такие множества Жюлиа называются *пылью Фату*.

Множество Мандельброта — один из самых знаменитых объектов в нелинейной динамике. Оно представляет собой множество всех значений комплексного параметра c , при которых множество Жюлиа связно, т.е. последовательность (91) остается ограниченной.

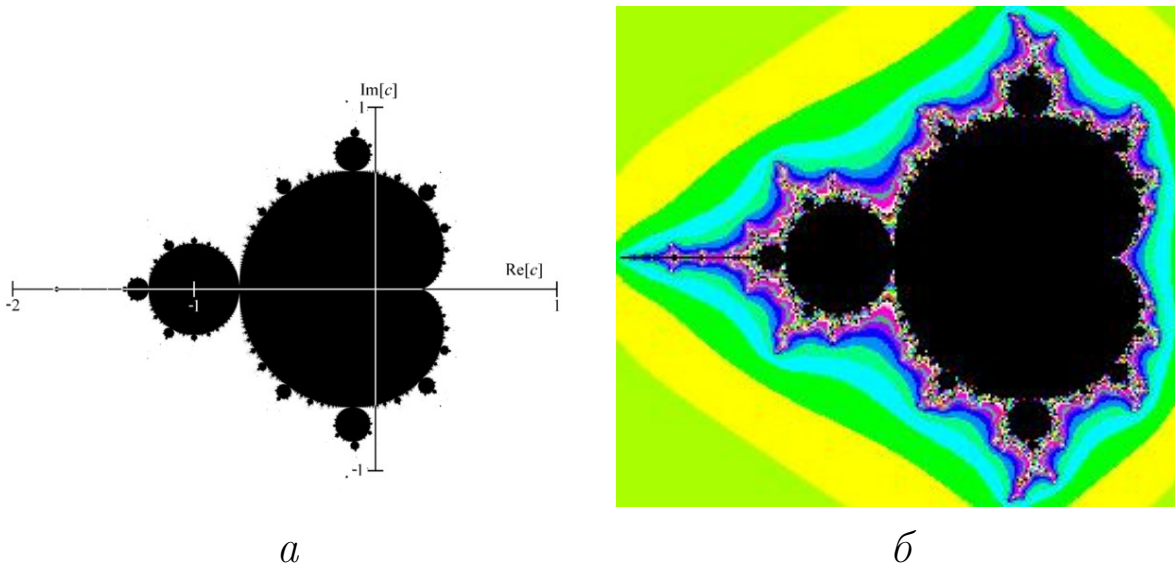


Рис. 47. Множество Мандельброта: (а) классический черно-белый вариант, (б) представление в цвете

Для построения графического изображения множества Мандельброта используется следующий алгоритм. Доказано, что всё множество целиком расположено внутри круга радиуса 2 на плоскости. Поэтому будем считать, что если для точки c последовательность итераций функции (91) с начальным значением $z_0 = 0$ после некоторого большого их числа N (скажем, 100) не вышла за пределы этого круга, то точка принадлежит множеству и окрашивается в черный цвет. Соответственно, если на каком-то этапе, меньшем N , элемент после-

довательности по модулю стал больше 2, то точка множеству не принадлежит и остается белой. Таким образом, можно получить черно-белое изображение множества, которое и было получено Мандельбротом (рис. 47,а). Чтобы сделать его цветным, можно, например, каждую точку не из множества красить в цвет, соответствующий номеру итерации, на котором ее последовательность вышла за пределы круга (рис. 47,б). Самое интересное — это границы множества Мандельброта, которые имеют фрактальную структуру. На границах этого множества функция ведет себя непредсказуемо — хаотично.

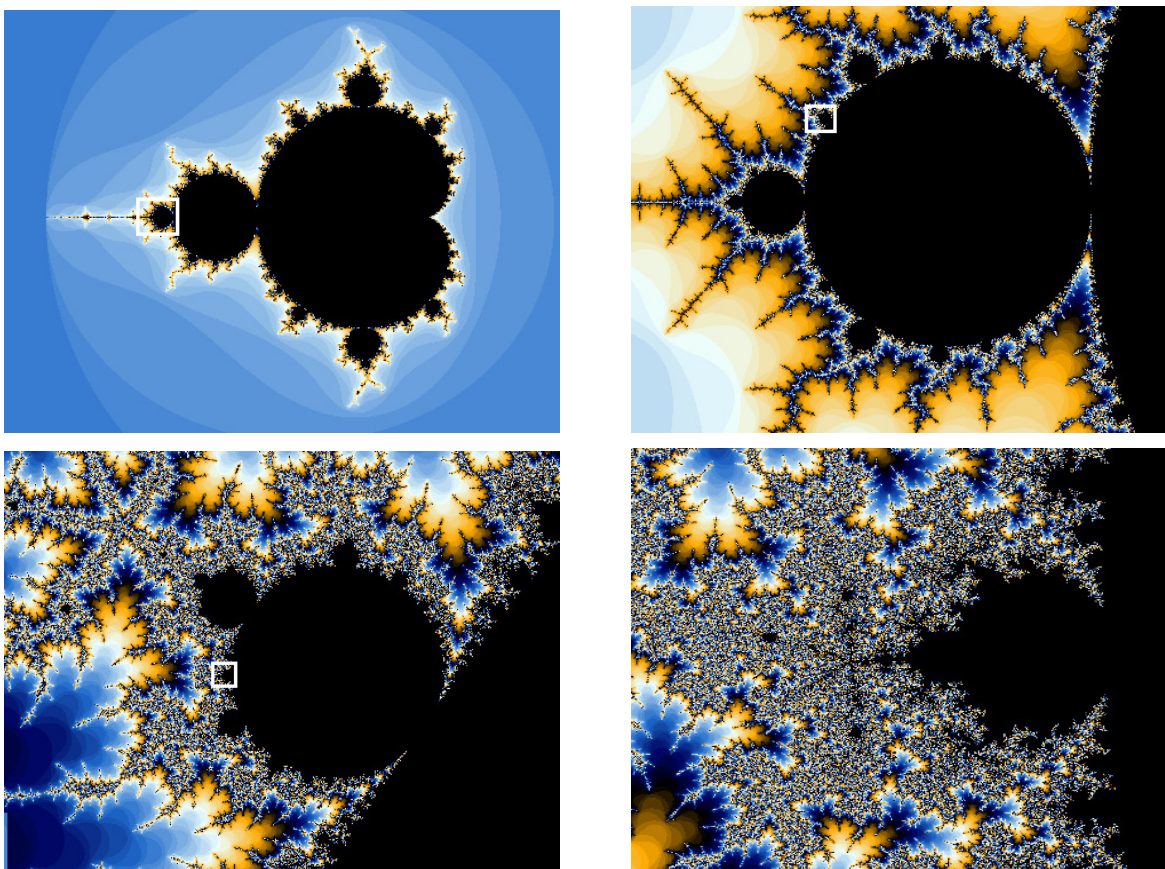


Рис. 48. Множество Мандельброта. Показаны увеличенные фрагменты предыдущего изображения, обведенные в рамку

В основе множества Мандельброта лежит *кардиоида* (она похожа на стилизованное изображение сердца и получила свое название от двух греческих слов — "сердце" и "вид") с вершинами на вещественной оси в точках 0,25 и -0,75 и круг радиуса 0,25 с центром в точке -1. Кардиоида окружена всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружен еще меньшими кругами, и т. д. до бесконечности. При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами (рис. 48). И этот процесс можно продолжать бесконечно.

Стохастические фракталы

Фракталы, при построении которых случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются *стохастическими*. Термин "стохастичность" происходит от греческого слова, обозначающего "предположение".

Стохастическим природным процессом является броуновское движение. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто: надо просто задать последовательности случайных чисел и настроить соответствующий алгоритм. При этом получаются объекты, очень похожие на природные, — несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. С помощью компьютерной программы можно построить какие-нибудь объекты живой природы, например, ветку дерева. Процесс конструирования этого геометрического

фрактала задается более сложным правилом, нежели построение вышеописанных кривых.

Рассмотрим его на примере ветки. Всего лишь несколько шагов в компьютерном алгоритме — и мы видим, как образуется ветка-фрактал (рис. 49, слева).

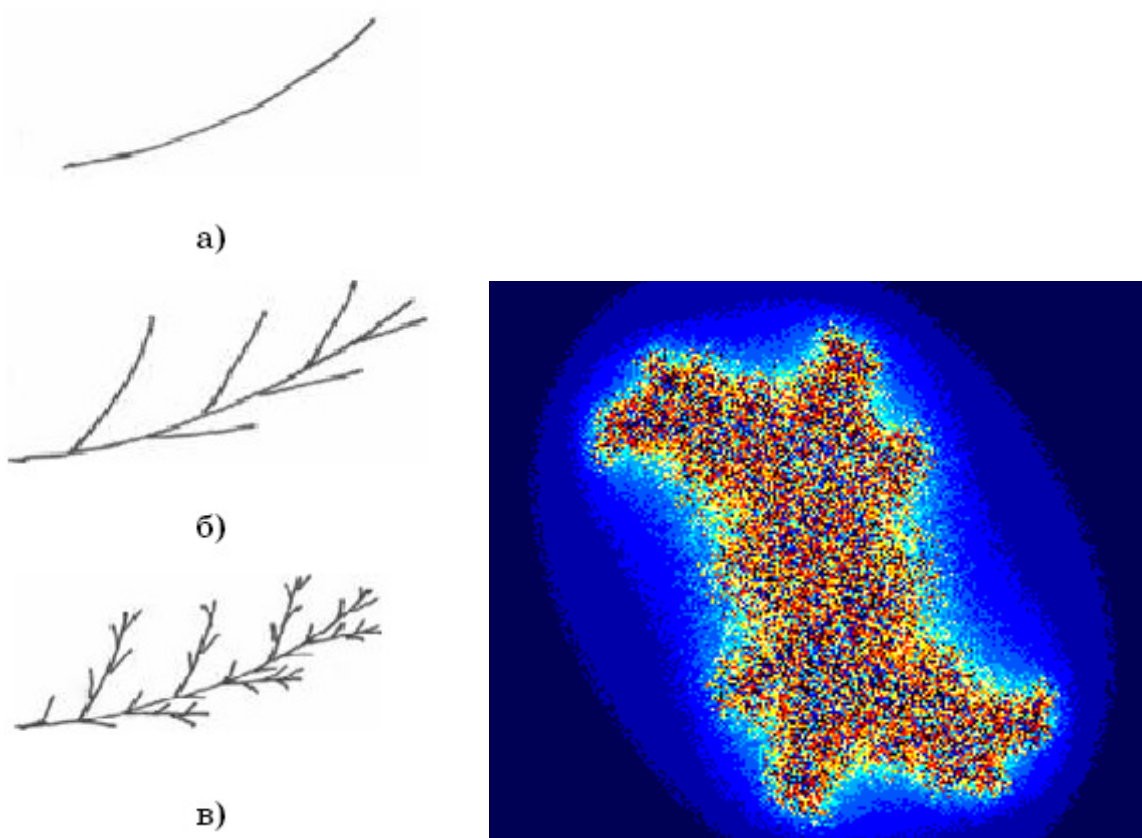


Рис. 49. Построение ветки-фрактала (слева) и рандомизированное множество Жюлиа (справа)

Рандомизированный фрактал строится по обычному алгоритму, за исключением того, что при вычислении на каждой итерации добавляются случайные величины (рис. 49, справа).

Естественные фракталы

Что общего у дерева, берега моря, облака, снежинки или кровеносных сосудов у нас в руке? Существует одно свойство структуры, присущее всем перечисленным предметам: они самоподобны. От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них — еще меньшие, и т. д., то есть ветка подобна всему дереву. Похожим образом устроена и кровеносная система: от артерий отходят артериолы, а от них — мельчайшие капилляры, по которым кислород поступает в органы и ткани. Посмотрим на космические снимки морского побережья: мы увидим заливы и полуострова; взглянем на него же, но с высоты птичьего полета: нам будут видны бухты и мысы; теперь представим себе, что мы стоим на пляже и смотрим себе под ноги: всегда найдутся камешки, которые дальше выдаются в воду, чем остальные. Получается, что береговая линия при увеличении масштаба остается похожей на саму себя. Таким образом, вышеперечисленные объекты обладают свойством самоподобия, имеют фрактальную структуру и составляют класс *естественных фракталов*. Ряд примеров естественных фракталов приведен на рис. 50.

С береговой линией, а точнее, с попыткой измерить ее длину, связана одна интересная история, которая легла в основу научной статьи Мандельброта, а также описана в его книге “Фрактальная геометрия природы”. Речь идет об эксперименте, который поставил Льюис Ричардсон — талантливый американский математик, физик и метеоролог. Одним из направлений его исследований была попытка найти математическое описание причин и вероятности возникновения вооруженного конфликта между двумя странами. В числе параметров,

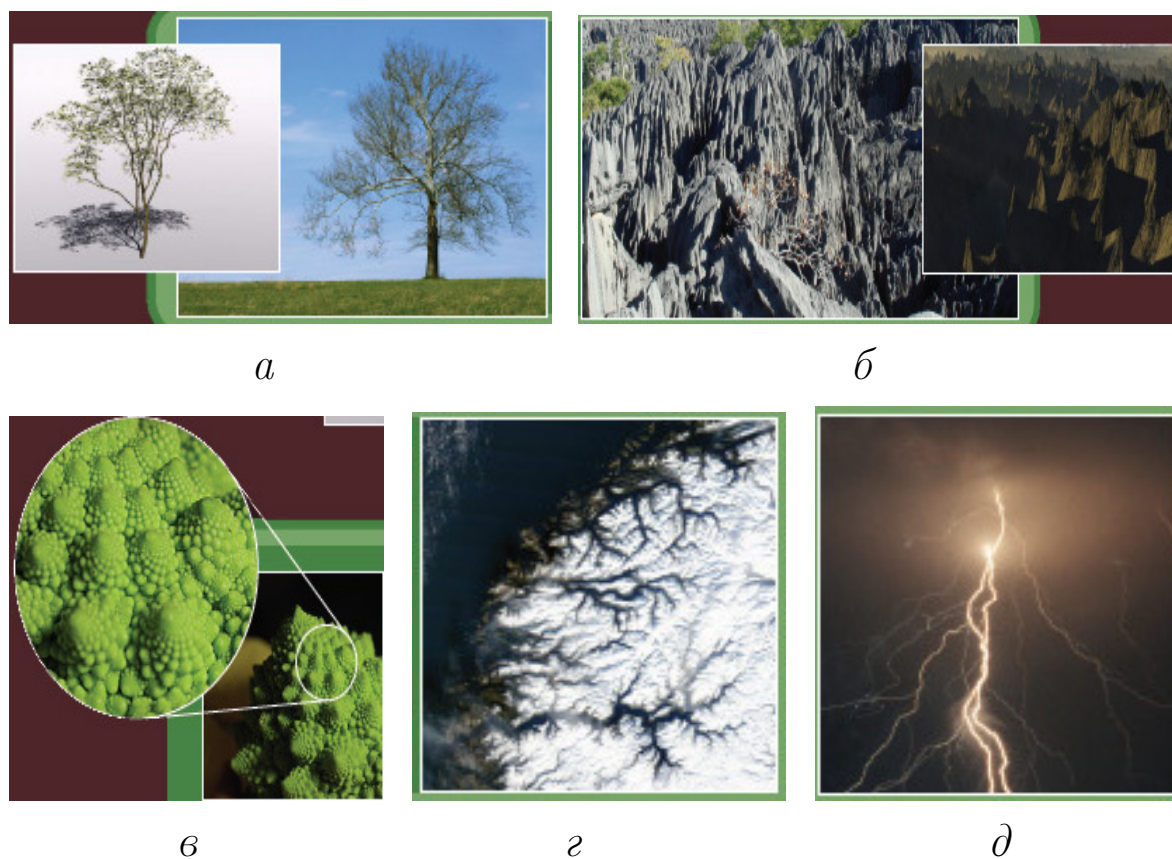


Рис. 50. Примеры естественных фракталов: (*а*) настоящее и смоделированное (слева) дерево; (*б*) компьютерный ландшафт (справа) напоминает скалы в заповеднике на Мадагаскаре; (*в*) капуста романеско и ее увеличенный фрагмент (слева); (*г*) изрезанное фьордами побережье Норвегии; (*д*) молния во время грозы

которые он учитывал, была протяженность общей границы двух враждующих стран. Когда он собирал данные для численных экспериментов, то обнаружил, что в разных источниках данные об общей границе Испании и Португалии сильно отличаются. Это натолкнуло его на следующее открытие: длина границ страны зависит от линейки, которой мы их измеряем. Чем меньше масштаб, тем длиннее получается граница. Это происходит из-за того, что при большем увеличении становится возможным учитывать всё новые и новые изгибы берега, которые раньше игнорировались из-за грубости

измерений. И если при каждом увеличении масштаба будут открываться ранее не учтенные изгибы линий, то получится, что длина границ бесконечна! Правда, на самом деле этого не происходит — у точности наших измерений есть конечный предел. Этот парадокс называется эффектом Ричардсона (Richardson effect).

Опыт показывает, что длина береговой линии L зависит от масштаба l , которым проводятся измерения, и увеличивается с уменьшением последнего по степенному закону $L = K \cdot l^{-\alpha}$, где $K = \text{const}$. Так, например, для побережья Великобритании $\alpha \approx 0.3$. Происхождение такой зависимости понятно: чем меньше масштаб мы используем, тем меньшие детали побережья будут учтены и дадут вклад в измеряемую длину. Наоборот, увеличивая масштаб, мы “спрямляем” побережье, уменьшаем тем самым его длину L . Число раз N , которое измерительный масштаб l укладывается вдоль побережья, равно: $N = L/l = K \cdot l^{-(1+\alpha)}$. На рис. 51 проиллюстрировано измерение длины побережья Великобритании в зависимости от выбранного масштаба.

По данной терминологии береговая линия Великобритании представляет собой фрактал с размерностью $D = 1 + \alpha \approx 1.3$.

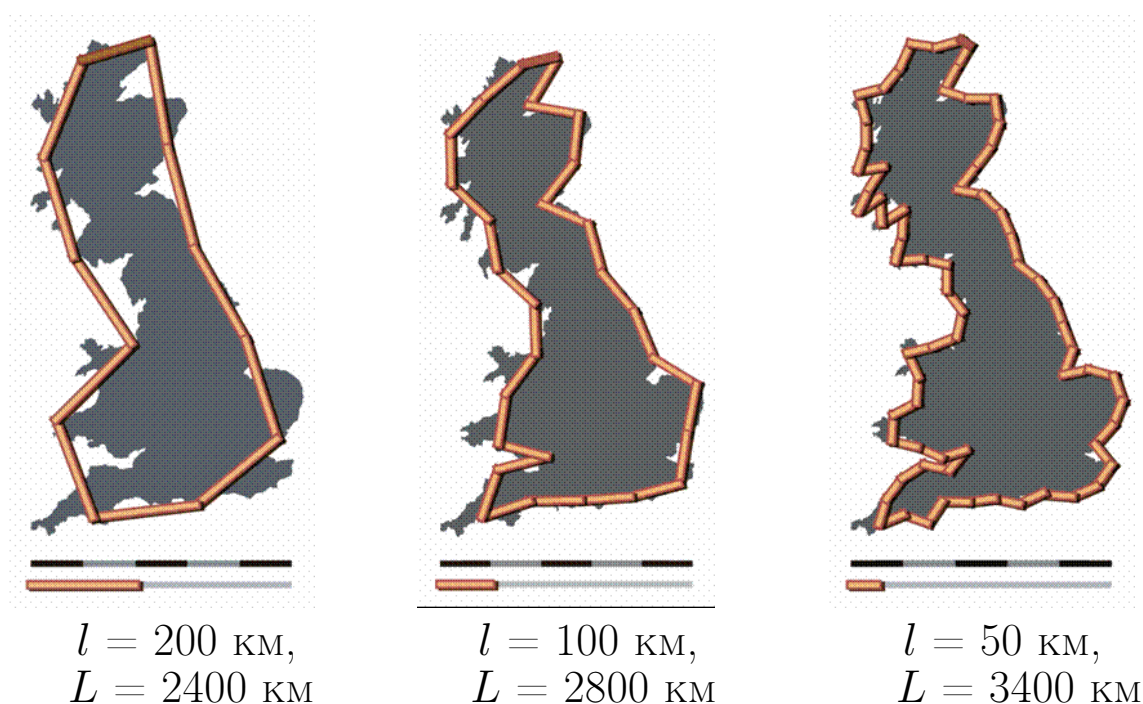


Рис. 51. Длина побережья Великобритании L в зависимости от измерительного масштаба l

2.5 Синхронизация периодических автоколебаний

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных нелинейных явлений природы. Его можно рассматривать как один из примеров самоорганизации взаимодействующих систем. Под синхронизацией обычно понимают установление некоторых соотношений между характерными време-

нами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия.

Эффект синхронизации автоколебаний был открыт Христианом Гюйгенсом более 350 лет назад, в 1665 году. Он наблюдал за колебаниями двух маятниковых часов, поместив их на общей деревянной балке, размещенной на спинках стульев. Оригинальная схема эксперимента в изображении автора представлена на рис. 52.



Христиан Гюйгенс,
голландский физик
(1629–1695)

Как писал сам Х. Гюйгенс, “Двое часов, висящих на балке друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе без отклонений. Когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются к синхронному и сохраняют его до тех пор, пока я не нарушу их ход.” Проводя детальные исследования по схеме рис. 52, Х. Гюйгенс установил, что режим синхронизации часов характеризовался противофазными колебаниями маятников часов. Спу-

стя многие годы в теории колебаний было доказано, что режим противофазной синхронизации отличается от синфазного тем, что характеризуется большей степенью устойчивости.

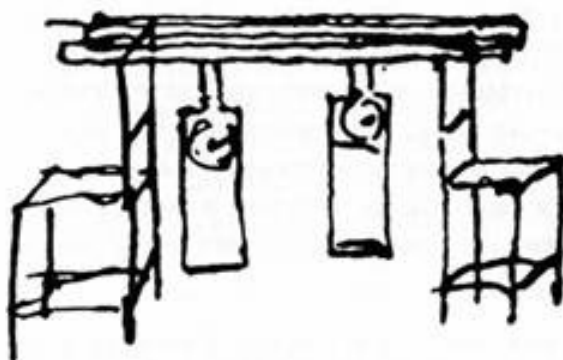


Рис. 52. Схема эксперимента Х. Гюйгенса в авторском изображении

Исследования многих ученых после работы Х. Гюйгенса показали, что эффект синхронизации автоколебательных систем является фундаментальным свойством и реализуется в колебательных системах самой различной природы. В середине 19-го века лорд Дж. Рэлей наблюдал взаимную синхронизацию двух органных труб. Различные, но схожие по параметрам трубы, расположенные близко друг к другу, начинали звучать на одной ноте. В первой половине 20-го века было исследовано явление синхронизации колебаний в радиотехнических генераторах. Так в 1920 году В. Экклес и Дж. Винсент экспериментально установили эффект взаимной синхронизации двух триодных генераторов. В 1927 году Э. Эплтон и Б. ван дер Поль разработали основы теории внешней синхронизации триодного генератора. Законченная теория синхронизации на основе теории колебаний была создана А.А. Андроновым и А.А. Виттом в конце двадцатых годов прошлого столетия.

Эффект синхронизации наблюдается не только в технических, но и в живых системах. Например, синхронизация роя светлячков (Э. Кэмпфор, 1727 г.), листья многих растений поднимаются и опускаются в соответствии со сменой дня и ночи (Ж.Ж. Дорту, 1729 г.). Было экспериментально подтверждено явление внешней и взаимной синхронизации кардиоритма организма человека (В.С. Анищенко, 1997 г.). Подобные примеры можно продолжать.

В настоящее время детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний, рассмотрены случаи синхронизации квазипериодических колебаний и колебаний в присутствии случайных флуктуаций. В рамках классической теории различают вынужденную синхронизацию, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты синхронизации, связанные с двумя классическими механизмами: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением собственной частоты одной из взаимодействующих систем.

Среди наиболее типичных физических явлений, наблюдающихся в динамических системах при внешнем гармоническом возбуждении, отметим резонанс, синхронизацию и возбуждение режима динамического хаоса. Эффект резонанса хотя и очень важный в естествознании, однако является наиболее простым среди названных выше.

Рассмотрим линейный диссипативный осциллятор при внешнем возбуждении гармонической силой:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin \omega_1 t. \quad (93)$$

Если зафиксировать амплитуду воздействия $a = \text{const}$ и пронаблюдать отклик системы при вариации частоты ω_1 и коэффициента диссипации γ , то мы получим результат, представленный на рис. 53. Явление резонанса заключается в резком возрастании амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты внешней силы ω_1 с собственной частотой автономного осциллятора $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \approx \omega_0$. Резонанс характеризуется типичными зависимостями $A(\omega_1)$, которые носят название резонансных кривых. Резонансные свойства систем широко распространены в природе и используются в технике. В частности, эффект резонанса служит одним из основных при создании динамических систем, способных совершать незатухающие периодические колебания в автономном режиме.

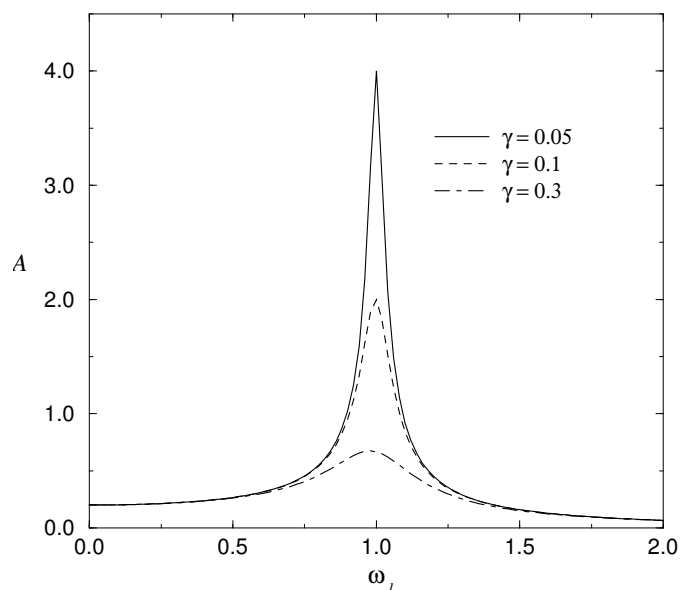


Рис. 53. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний в системе (93) от частоты внешнего воздействия, для различных значений коэффициента диссипации. Остальные параметры: $\omega_0 = 1.0$, $a = 0.2$, $\gamma = 0.3$.

Примером могут служить так называемые генераторы томсоновского типа, близкие к линейным консервативным осцилляторам. Если к резонансной системе с малой диссипацией подключить усилитель и ввести обратную связь, удовлетворяющую неким специальным амплитудным и фазовым условиям, то мы получим генератор незатухающих близких к гармоническим колебаний.

Генератор ван дер Поля. Наиболее простым и классическим примером генератора томсоновского типа служит известная модель ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (94)$$

где ε – малый положительный параметр, характеризующий степень обратной связи, ω_0 – частота периодических колебаний. Математическим образом периодических колебаний на фазовой плоскости (x, \dot{x}) является замкнутая фазовая траектория, названная предельным циклом.

С физической точки зрения понятию предельного цикла отвечает режим так называемых “автоколебаний”, когда характеристики устойчивого периодического режима не зависят от начальных условий, а определяются исключительно свойствами самой системы. Система (94) характеризуется единственным состоянием равновесия типа фокус на фазовой плоскости (x, \dot{x}) в нуле координат. Собственные значения состояния равновесия легко вычислить:

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}. \quad (95)$$

Как следует из (95), при переходе в область положительных значений ε состояние равновесия теряет устойчивость.

При $\varepsilon = 0$ имеем $s_{1,2} = \pm i$. Состояние равновесия типа фокус претерпевает бифуркацию рождения предельного цикла Андронова–Хопфа. Амплитуда цикла растет пропорционально корню квадратному из надкритичности $(\sqrt{\varepsilon})^2$, а период цикла при $0 < \varepsilon < 1$ определяется соотношениями

$$T \cong \frac{2\pi}{\omega(\varepsilon)}, \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad (96)$$

то есть частота генерации при $0 < \varepsilon < 1$ близка к собственной частоте резонансного контура ω_0 .

Рассмотрим динамику генератора (94) при воздействии на него аддитивной гармонической силы:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t + \phi_0). \quad (97)$$

Получить решение уравнения (97) с помощью компьютера не представляет труда. Однако, для понимания сути динамических явлений проведем приближенное аналитическое исследование, которое позволит нам глубже понять физический смысл эффекта синхронизации. Для этого обсудим вначале понятие фазы колебаний. Термин “фаза колебаний” первоначально был введен для гармонических процессов типа $x(t) = A \exp(i\omega t) = A(\cos \omega t + i \sin \omega t)$. В полярной системе координат это колебание изображается как вращение вектора A с постоянной угловой скоростью ω . Фазе колебаний отвечает угол поворота вектора A во времени $\phi = \omega t$. Значению угла в начальный момент времени $\phi_0 = \omega t_0$ отвечает начальная фаза, с которой регистрируется колебательный процесс во времени $t > t_0$.

² В уравнении (94) безразмерная переменная нормирована на $\sqrt{\varepsilon}$, поэтому является постоянной и равной 2.

В диссипативных нелинейных системах такое определение фазы использовать нельзя, так как колебания в них не могут быть строго гармоническими. Как же поступить в такой ситуации? Ответ зависит от того, какую динамическую систему и какой тип автоколебаний мы исследуем.

Вернемся к системе (97). При малых $0 < \varepsilon \ll 1$ и $a = 0$ уравнение (97) описывает автоколебания в генераторе томсоновского типа. В этом случае решение $x(t)$ можно искать в виде

$$x(t) = A(t) \cos [\omega_1 t + \phi(t)], \quad \dot{x}(t) = -\omega_1 A(t) \sin [\omega_1 t + \phi(t)], \quad (98)$$

где $A(t)$ – медленно меняющаяся во времени амплитуда колебаний, $\phi(t)$ – медленно меняющаяся во времени фаза колебаний, ω_1 – частота внешнего сигнала в (97). Иначе говоря, мы вводим в рассмотрение понятие мгновенной амплитуды $A(t)$ и мгновенной фазы колебаний:

$$\Phi(t) = \omega_1 t + \phi(t). \quad (99)$$

Решение уравнений (97) будем искать в виде:

$$x(t) = A(t) \cos \Phi(t). \quad (100)$$

В этом случае зависящая от времени компонента фазы $\phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ представляет собой мгновенную разность фаз между результирующим близким к гармоническому процессом $x(t)$ и внешним гармоническим сигналом. Условие медленного изменения фазы $\phi(t)$ во времени означает, что $\dot{\phi}(t) \ll \omega_1$. Опуская процедуру несложных, но громоздких преобразований, описанную во многих учебниках, запишем явный вид уравнений первого приближения для мгновенной амплитуды $A(t)$ и мгновенной фазы $\phi(t)$

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) - \mu \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \phi,\end{aligned}\tag{101}$$

где $\mu = a/2\omega_1$ – параметр нелинейности системы (101), $\Delta = (\omega_0^2 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong \omega_0 - \omega_1$ – расстройка по частоте между собственной частотой автономного генератора и частотой внешнего сигнала в (97), ε – параметр возбуждения генератора.

Уравнения (101) по смыслу представляет собой усредненные по времени уравнения, которые часто называются системой “укороченных уравнений”. Неподвижной точке системы (101) ($\dot{A} = 0$, $\dot{\phi} = 0$) будет отвечать периодическое решение исходной системы (97), а периодическому решению (101) – двухчастотное квазипериодическое решение уравнения (97).

Отметим, что укороченные уравнения получены в приближении медленно меняющихся амплитуды и фазы и, как показывают расчеты, могут описывать процесс $x(t)$ в (97) при условии, что $\mu \leq 0.05$.

Предположим, что система уравнений (101) имеет в качестве решения неподвижную точку (или состояние равновесия) $\dot{A} = 0$, $\dot{\phi} = 0$ и она устойчива. Условие $\dot{A} = 0$ означает постоянство во времени амплитуды колебаний, а условие $\dot{\phi} = 0$ означает, что $\dot{\Phi} = \omega_1$ (см. (99)), то есть частота вынужденных колебаний в системе (97) будет совпадать с частотой внешней силы. Если этот режим колебаний возможен и является устойчивым, то частота колебаний в неавтономном генераторе (97) изменится и окажется равной частоте внешней силы ω_1 . При этом амплитуда колебаний во времени меняться

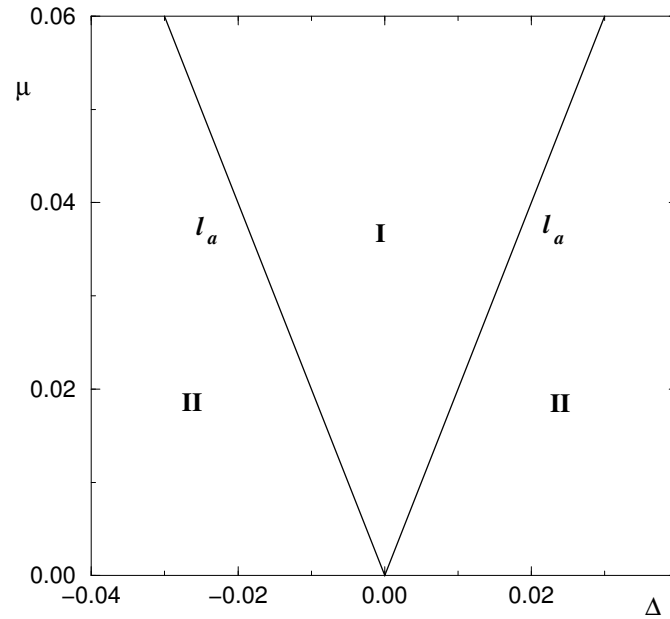


Рис. 54. Область синхронизации, отвечающая устойчивости неподвижной точки системы (101)

не будет. Генератор “подстроится” по частоте и реализуется эффект вынужденной синхронизации.

Найти координаты неподвижной точки $A^0(\mu, \Delta)$ и $\phi^0(\mu, \Delta)$ можно аналитически, решая (101) при условии равенства нулю правых частей уравнений. Можно также аналитически исследовать устойчивость A^0 и ϕ^0 . Расчеты показывают, что на плоскости параметров (μ, Δ) существует область их значений, в которой состояние равновесия устойчиво. Эта область представлена на рис. 54. На границах области (линии l_a) равновесие теряет устойчивость, из равновесия рождается предельный цикл (переход из области I в области II).

Как уже отмечалось, в полной системе (97) состоянию равновесия отвечает предельный цикл, а циклу – двумерный тор. Это означает, что в области I мы имеем устойчивые колебания с частотой ω_1 , а вне ее – квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами ω_1 и ω_0 . Область I, в которой

частота колебаний генератора $\omega_0 = \omega_1$, называется областью синхронизации на основном тоне.

Эффект синхронизации иллюстрирует также зависимость разности частоты колебаний системы (97) и частоты внешнего воздействия от расстройки Δ (кривая 1 на рис. 55). Как видно из рисунка, в конечной области значений параметра расстройки частота собственных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия. Вне области синхронизации частота колебаний генератора отличается от частоты внешней силы и в системе реализуется режим двухчастотных квазипериодических колебаний.

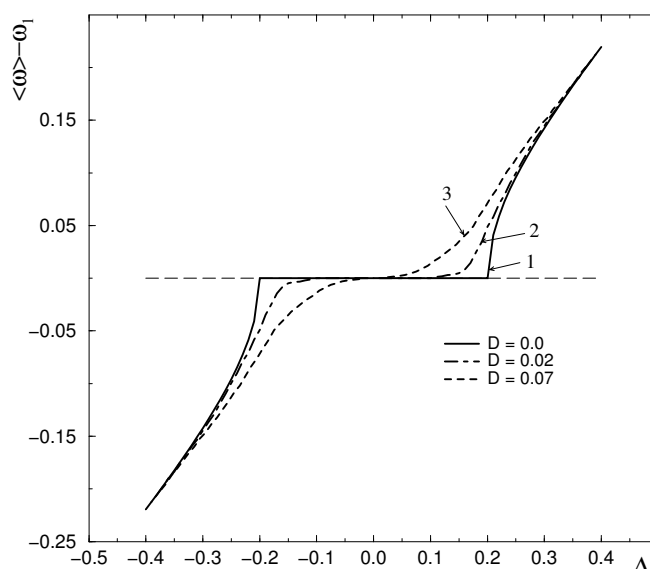


Рис. 55. Зависимость разности средней частоты колебаний в системе (97) и частоты внешнего воздействия от величины параметра расстройки для различных значений интенсивности шума

Интересным представляется следующий вопрос: что будет происходить при дальнейшем увеличении расстройки, т.е. при дальнейшем увеличении частоты внешней силы в области квазипериодических колебаний? Для ответа на данный во-

прос введем в рассмотрение так называемое число вращения Пуанкаре, как отношение частот $\theta = \omega_1/\omega$. Здесь ω_1 – частота внешней силы, а ω – частота колебаний генератора. В рассмотренном выше случае синхронизации на основном тоне мы имеем $\omega = \omega_1$ и число вращения равно единице. Этот случай отвечает резонансу 1:1 на двумерном торе. Как видно из рис. 55 (кривая 1), при выходе из области синхронизации $\omega \neq \omega_1$, а их разность монотонно растет с увеличением ω_1 . Это означает, что число вращения также будет изменяться по величине, принимая последовательно то иррациональные, то рациональные значения.

Рациональным значениям числа вращения $\theta = m : n$ отвечают более сложные (в сравнении с резонансом 1 : 1) резонансные циклы на торе. Области устойчивости этих циклов определяют соответствующие области синхронизации или области захвата частоты и фазы. С увеличением порядка резонансов (с ростом m и n) области синхронизации становятся заметно уже, но сохраняют качественно форму области синхронизации при резонансе 1 : 1 (см. рис. 54). Если произвести расчеты зависимости $\omega - \omega_1$ от расстройки Δ в диапазоне $0 \geq |\Delta| \geq 1$, используя исходные уравнения (97), то мы получим график с бесконечным числом “полочек” типа рис. 55, ширина которых уменьшается с ростом m и n . Этот график имеет фрактальную структуру и носит название “дьявольской лестницы”.

Рассмотренный выше случай динамики генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии отвечает случаю так называемой внешней или вынужденной синхронизации. При внешней синхронизации воздействие на генера-

тор является однонаправленным, обратная реакция генератора Ван дер Поля на источник внешней силы отсутствует. На практике часто реализуется более общий случай взаимодействия двух автоколебательных систем с различными собственными частотами ω_1^0 и ω_2^0 . Данное взаимодействие характеризуется тем, что колебания двух генераторов оказывают влияние друг на друга, а связь между ними осуществляется в обоих направлениях, как от первого ко второму, так и наоборот. Исследования показали, что качественного различия между этими случаями нет: эффект синхронизации наблюдается и при взаимной связи между двумя генераторами. Отличие может состоять лишь в том, что частота синхронных колебаний может быть ω_1^0 , ω_2^0 или не совпадать с ними, занимая промежуточное значение $\omega_1^0 < \omega_p < \omega_2^0$. Эффект синхронизации двух взаимодействующих генераторов называют взаимной синхронизацией.

Совокупность рассмотренных динамических явлений в неавтономном и связанных генераторах позволяет сформулировать критерии и основные свойства нелинейного явления, называемого синхронизацией. Тот факт, что первоначально был проведен детальный анализ случая внешнего возбуждения генератора строго гармонической силой не является принципиальным. Важно лишь то, что внешняя сила является периодической. В частности, это следует и из рассмотрения качественной динамики двух связанных генераторов. Известно, что колебания в генераторах являются периодическими, близкими к гармоническим, но не гармоническими. Основным признаком как внешней, так и взаимной синхронизации является установление режима колебаний с постоян-

ным и рациональным значением числа вращения Пуанкаре $\theta = m : n$, которое сохраняется в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации. Область синхронизации характеризуется эффектом захвата частоты и фазы колебаний. Захват частоты означает рациональное отношение двух исходно независимых частот $\omega_1 : \omega_2 = m : n$ всюду в области синхронизации. Захвату фаз отвечает постоянство разности фаз колебаний взаимодействующих генераторов в области синхронизации ($\dot{\phi} = 0$, $\phi_{st} = \text{const}$).

С физической точки зрения эффект синхронизации состоит в том, что два характерных собственных временных масштаба взаимодействующих колебательных систем, которые в отсутствие связи являлись независимыми, при взаимодействии оказываются целочисленно кратными или рационально связанными. При этом важно, что эта кратность оказывается фиксированной в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации.

Заключение

В книге изложены материалы, которые призваны дать в доступной форме представления о таких научных направлениях как радиофизика и нелинейная динамика. Безусловно, что содержание учебного пособия не в состоянии служить детальным введением в радиофизику и такой цели авторами не ставилось. В то же время описание ключевых вопросов и проблем радиофизики в рамках настоящей книги по мнению авторов позволит выпускникам средних школ и студентам первого курса физических факультетов составить собственное представление о том, какие научные проблемы и с какой целью изучаются студентами по направлению подготовки “Радиофизика”. Это должно помочь молодым людям сделать более осознанный выбор при определении направления обучения в вузе.